Abiturarbeiten im Fach Mathematik im Wandel der Zeiten – eine mathematikdidaktische Analyse

Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe II mit Zusatzprüfung für die Sekundarstufe I, dem Staatlichen Prüfungsamt für Erste Staatsprüfungen für Lehrämter an Schulen in Dortmund vorgelegt von:

Gabriel Isenberg

Siegen, den 15. Mai 2006

Gutachter: Prof. Dr. Rainer Danckwerts
Fachbereich 6: Mathematik
Universität Siegen

Inhaltsverzeichnis

Anlagen (CD-ROM):

Internet-Dokumente; pdf-Dateien (u. a. Lehrpläne).

Detailliertes Anlagen-Verzeichnis siehe dort.

1. Einleitung

> „Es ist bisher vielfältig bemerkt worden, daß soviele zum Studieren bestimmte Jünglinge ohne gründliche Vorbereitung unreif und unwissend zur Universität eilen […]. So haben Wir für nöthig gefunden, in Ansehung der Prüfung der zur Universität abgehenden Jünglinge eine neue Einrichtung zu machen […]. Es ist daher beschlossen worden, daß künftig alle von öffentlichen Schulen zur Unversität abgehende Jünglinge schon vorher auf der bisher von ihnen besuchten Schule in der weiter unten zu bestimmenden Form öffentlich geprüft werden.“[1]

Mit diesen Worten legte Friedrich Wilhelm, König von Preußen, am 23. Dezember 1788 den Grundstein für eine Prüfungsform, die bis heute das zentrale Element der höheren Schulausbildung ist: das Abitur. Kaum eine andere Prüfung regte so viele Diskussionen um Form, Inhalt und Zweckbestimmung an wie das Abitur. In enger Verbindung damit stand eine ständige fachliche und fachdidaktische Entwicklung, die hier nun für das Fach Mathematik untersucht werden soll.

Im Bereich der Erfassung und Analyse schriftlicher Abiturarbeiten im Fach Mathematik im Wandel der Zeiten gibt es m. W. keine umfassende Untersuchung. Einzelbetrachtungen werfen immer wieder Blicke auf einzelne Epochen und Aspekte der Thematik, selten aber mit dem Abitur als zentralem Interessenschwerpunkt. Daher musste diese Arbeit auf vielen Einzelquellen aufbauen, um ein Gesamtbild der Entwicklung des Abiturs in Mathematik zeichnen zu können.

Daneben bot sich die Möglichkeit, das Schularchiv des Gymnasiums Stift Keppel in Hilchenbach zu benutzen, in dem seit 1894 Abschlussarbeiten, seit 1913 Abiturarbeiten im Fach Mathematik aufbewahrt werden. Die Erfassung und Auswertung dieses Bestandes bildet einen Schwerpunkt dieser Arbeit.

Um nicht nur die isolierte Analyse des Abitur-Bestandes von Stift Keppel zu betreiben, ist der Vergleich mit den allgemeinen Entwicklungen der Schulmathematik ein weiterer Kernpunkt dieser Arbeit. Die ersten beiden Kapitel umfassen Darstellungen zu allgemeinen Entwicklungen von Mathematik und Abitur, die dann in Bezug zum schriftlichen Abitur in Mathematik gesetzt werden.

Bei allen Untersuchungen bildet die Frage der didaktischen Vermittlung neben den äußerlichen Gegebenheiten einen wichtigen Analyseansatz. Daher wer-

[1] Zit. nach N. KAMP (1988), S. 266.

den zu Beginn allgemeine didaktische Überlegungen zu Funktion und Ziel des Mathematikunterrichts an der Schule erörtert.
Darüberhinaus stellen persönliche Erfahrungen – als ehemaliger Schüler von Stift Keppel und jetzt Student an der Universität Siegen – ein verbindendes Element zwischen allgemeiner und spezieller Betrachtungsweise dieser Arbeit dar, aufbauend auf meinen Erkenntnissen aus dem Seminar „Didaktik der Analysis“ (Sommersemester 2003).

Der Umfang dieser Arbeit machte gewisse thematische Eingrenzung notwendig, die hier kurz benannt werden sollen:
– Der zeitliche Betrachtungsrahmen umfasst die Jahrhunderte seit der Einführung des Abiturs 1788. Die konkrete Analyse von Abituraufgaben setzt allerdings erst später ein; durch den Zeitraum, der durch die erfassten Arbeiten aus Stift Keppel vorgegeben ist, wird die Abiturgeschichte der letzten ca. hundert Jahre verstärkt behandelt.
– In Deutschland ist Bildungspolitik eine Angelegenheit der Länder. Daher erscheint es sinnvoll, die Betrachtungen auf das Land zu beschränken, das für den lokalen Bezug zur Universität Siegen (und auch zu Stift Keppel) relevant ist: Nordrhein-Westfalen bzw. Preußen.
– Die Analyse von Abiturarbeiten steht besonders mit den Fachinhalten der gymnasialen Oberstufe (Sekundarstufe II) in Zusammenhang. Daher werden sich die Darstellungen der Geschichte der Mathematikdidaktik im Wesentlichen auf die Oberstufe des Gymnasiums (sowie der Realanstalten in früheren Zeiten) beschränken. Vor Einführung des Stufenmodells werden die abiturrelevanten Unterrichtsinhalte darustellen sein.
– Zuletzt erlaubt die Beschränkung auf das *schriftliche* Abitur eine bessere Übersichtlichkeit. Eine Auswertung der Inhalte *mündlicher* Abituraufgaben würde keine wesentlich anderen Ergebnisse liefern. Auch auf die Unterschiede zwischen Leistungskurs und Grundkurs (nach 1972) wird nicht weiter eingegangen, da die Unterschiede zwischen den Kursarten nicht im großen methodologischen Rahmen zu suchen sind, sondern eher Umfang und ggf. Schwierigkeitsgrad der Aufgabentypen betreffen. Die Frage, in welcher Kursart bspw. der Anteil anwendungsorientierter Aufgabenstellungen höher ist als jener der innermathematisch kalkülorientierten Rechenübungen, muss offen bleiben und bedürfte einer gesonderten Untersuchung. Im Rahmen der Analyse eines zeitabhängigen Vergleichs von Abiturinhalten sind solche zeitparallelen Vergleiche nur von nachrangiger Bedeutung.

2. Mathematik in Schule und Abitur

Mathematik zählt heute zu den zentralen Fächern des allgemeinbildenden Schulwesens und scheint in seiner starken Rolle kaum noch angefochten. Dass die Wichtigkeit dieses Schulfaches nicht immer unbestritten war und auch heute noch über Sinn und Zweck der Mathematik in der Schule gerne diskutiert wird (→*Kapitel 2.1.2*), ist vor allem durch die Eigenheit des Faches selbst zu begründen, dass sich nur schwer in den Kanon der anderen Fächer einordnen lässt. SCHUBRING bezeichnet das als „Doppelcharakter“ der Mathematik[2]; demnach lässt sich Mathematik in ihrer konkret-anschaulich-anwendbaren Funktion als Naturwissenschaft betrachten, besitzt aber in ihrer Art als abstrakt-logische Wissenschaft in enger Beziehung zur Philosophie gleichzeitig den Charakter einer Geisteswissenschaft.
Andererseits machte es die „klassische“ Ausrichtung des Gymnasiums mit seinem Schwerpunkt auf den Sprachen der Mathematik schwer, sich als gleichwertiges, wissenschaftliches Schulfach dort zu etablieren. Oft waren es nur Grundfertigkeiten im Rechnen, die auf den Schulen gelehrt wurden. Von wissenschaftlicher Mathematik konnte keine Rede sein. Dies mag erstaunen, zählte die Mathematik in der Antike doch in Form von Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie als *Quadrivium* (die vier Künste, die mit Zahlen zu tun haben) zu den *Septem artes liberales*, war also fester Bestandteil von hoher Bildung.

In diesem Kapitel möchte ich die Rolle der Mathematik als Schulfach zunächst allgemein, dann im konkreten Bezug auf das Abitur im Zeitraum der letzten ca. zweihundert Jahre (seit Einführung des Abiturs) untersuchen. Es erscheint mir sinnvoll, am Anfang dieser Arbeit der Frage nach Zielen und Aufgaben des Faches, im zweiten Abschnitt besonders vor historischem Hintergrund, nachzugehen. Dadurch kann die konkrete Analyse der Abituraufgaben auf einem Fundament aufbauen, das allgemeinschulische und didaktisch-geschichtliche Einblicke vermittelt.

2.1. Warum Mathematikunterricht?

Die Mathematik scheint uns einer der wichtigsten Pfeiler allgemeiner Bildung im 21. Jahrhundert zu sein, der aus dem Fächerkanon der Schulen nicht wegzudenken ist. Aber Warum? Was lässt die Mathematik als so wichtig erschei-

[2] G. SCHUBRING (1989), S. 278.

nen, dass schulische Allgemeinbildung darauf nicht verzichten kann? Diese Frage ist nicht etwa rein rhetorischer Art, sondern war und ist immer wieder Gegenstand öffentlicher Diskussionen. Somit liegt die Rechtfertigung ihres „Daseins“ auch im eigenen Interesse der Mathematikdidaktik.

Nicht zuletzt ist diese Fragestellung im Rahmen dieser Arbeit von besonderem Interesse, da sie direkte Auswirkungen auf Inhalt und Gestaltung des Faches und somit auf das Abitur als Abbild des gesamten (Oberstufen-)Unterrichtes hat. Daher sollten die in den folgenden Abschnitten gewonnenen Antworten als Hintergrundgedanken bei den weiteren Analysen dieser Arbeit stets präsent sein. Dass die Beantwortung dieser Frage abhängig ist vom zeitgeschichtlichen Kontext und den Anforderungen an allgemeine Bildung, wird in → *Kapitel 2.2.* deutlich. Hier soll der Frage nun aus der Sicht der letzten Jahrzehnte – seit Einführung der differenzierten Oberstufe – anhand ausgewählter Gedanken nachgegangen werden.

Dazu ist der Blickwinkel von einem außermathematischen Punkt sinnvoll, denn jede Wissenschaft ist ihrer Selbsterhaltung willen um die Tradierung des angesammelten Wissens bemüht und bedarf – von ihrer Umwelt isoliert – keiner Rechtfertigung. Die Frage nach dem Verhältnis zwischen Mathematikunterricht und Gesellschaft, wie sie P. DAMEROW 1984 stellt, ist der Kern der Diskussion um das Warum. Das Problem der Mathematik als „Hilfswissenschaft“, die sich selbst keinen konkreten Zweck erschließt, die in ihren Strukturen sehr abstrakt und geradezu philosophisch dasteht, ist eben jene Abstraktheit, die nach Verbindungen zum Nicht-Abstrakten, zum Konkreten, im weiteren Sinne eben zur Gesellschaft sucht. Mathematik ist eine Wissenschaft, die „angewendet“ werden möchte.

2.1.1 Mathematik und Gesellschaft

Zur Untersuchung des Verhältnisses zwischen Mathematik und Gesellschaft möchte ich mich in diesem Kapitel auf die Äußerungen von P. DAMEROW[3] beziehen. Er unterscheidet zwischen der „Mathematik“ und dem „Vorfeld der Mathematik“. Dieses Vorfeld sei jener Bereich, der

> „von der Mathematik aus zwar eingesehen werden kann, [der] aber weder seiner inneren Natur nach noch in der Abgrenzung gegen mathematisch überhaupt nicht mehr erfaßbare Bereiche mit den Mitteln der Mathematik allein hinlänglich bestimmt werden kann.“[4]

[3] P. DAMEROW (1984).
[4] Ebd., S. 11.

Das Vorfeld der Mathematik ist einerseits sozusagen die Wiege der abstrakten Mathematik, da es das abstrakt-logische Denken überhaupt erst notwendig macht. Andererseits ist die Mathematik Hilfsmittel, um jene konkreten Problemstellungen aus ihrem Vorfeld zu lösen, und daher unerlässlich. Während das abstrakte Gedankengerüst der Mathematik zeitunabhängig immer gültig bleibt („Zeitlosigkeit mathematischer Wahrheit“)[5], ist der reale Kontext des Vorfeldes mathematischer Probleme dem ständigen gesellschaftlichen Wandel unterlegen.

Die Lösung jener Probleme im Vorfeld der Mathematik ist eine alltägliche Aufgabe eines jeden Individuums der Gesellschaft, sei es der bloße Umgang mit dem Haushaltsgeld (eine schon recht abstrakte, mathematisierte Problemstellung) oder z. B. das Lesen der Straßenkarte (eine Anwendung geometrischer Fertigkeiten, deren mathematischer Zusammenhang i. A. gar nicht so bewusst wird).

Insofern ist das gesellschaftliche Leben durchdrungen von Mathematik, womit eine enge Verbindung zwischen Gesellschaft und Mathematik offenbar wird. Je alltäglicher die konkrete Aufgabenstellung ist, umso eher können feste Lösungsmuster angewandt werden, deren mathematischer Hintergrund oft gar nicht mehr bewusst ist. Mathematischer Unterricht erhält somit die Aufgabe, den Menschen zu selbständiger Entwicklung neuer Lösungsmuster zu befähigen. Das mathematische Denken beginnt dort, wo der Formalismus des nachgeahmten Lösungsverfahrens an seine Grenzen stößt.

Leider sieht der Alltag des Mathematikunterrichts anders aus, wo die unreflektierte Verwendung vorgegebener Lösungsschemata bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben eine weitaus größere Rolle spielt, als ihr die didaktische und pädagogische Programmatik der Lehrpläne einräumt.[6] Auf diesen Sachverhalt als ein zentrales Problem des Mathematikunterrichts werde ich im Laufe dieser Arbeit, zurückkommen.

In Bezug darauf stellt DAMEROW zwei Façetten mathematischen Unterrichts heraus:

– die zweckgebundene Tradierung, d. h. Weitergabe und Entwicklung von Problemlösetechniken, die in engem Zusammenhang mit praktischen Problemstellungen, also dem Vorfeld der Mathematik, stehen, und

– die Schulung des Geistes. Dabei zieht er die Tradition der Pythagoräer als Ausgangspunkt heran. Ihr Ziel war es nicht, Unterricht zu verstehen „als

[5] Vgl. P. DAMEROW (1984), S. 14ff.
[6] Vgl. ebd., S. 19.

Kunst, um ein Gewerbe daraus zu machen, sondern zur Bildung, wie es einer freien Herkunft […] geziemt“[7]. Folgerichtig erkennt er:

> „Mit dieser Idee [der „freien Lehre“] wurde nicht nur die Voraussetzung für einen in seiner Art vielleicht einzigartigen Vorlauf wissenschaftlichen Wissens gegenüber Problemstellungen der Praxis geschaffen; an die griechische Mathematik konnte die neuzeitliche Naturwissenschaft 1500 Jahre später nahezu bruchlos anknüpfen. Mit dieser Idee wurde vielmehr zugleich eine Tradition begründet, Bildung um ihrer selbst willen als Standesausweis zu begreifen.“[8]

Damit ist die mathematische Bildung und somit der mathematische Unterricht in engen Zusammenhang mit Gesellschaftsstand und Aristokratie gebracht. Für unsere Zeit sollte diese Argumentation nicht mehr als angemessene Daseinsbegründung für den Mathematikunterricht gelten, wenngleich sie – etwas abgewandelt – natürlich auch heute noch den Unterschied zwischen Bildung und Nicht-Bildung charakterisieren kann. Weiter stellt DAMEROW fest:

> „Die Mathematik ist noch weitaus abstrakter, die Spezialisierung ausgeprägter und der Kontakt zu den Anwendungen schwächer geworden. Die Problemlage ist nach wie vor akut, aber niemand erwartet mehr eine prinzipielle Lösung: Die Schulmathematik bleibt auch weiterhin im Spannungsfeld zwischen fachmathematischem Anspruch und gesellschaftlicher, auf die Integration einzelwissenschaftlichen Wissens gerichteter Anforderung.“[9]

Schließlich stellt sich für ihn die Frage, inwieweit es möglich ist, den schulischen Mathematikunterricht den rasanten gesellschaftlichen Veränderungen der letzten 100 Jahre anzupassen. Dabei stehen nicht die unumstößlichen mathematischen Strukturen (die „Zeitlosigkeit mathematischer Wahrheit“) in Frage, sondern die Vermittlung der Fähigkeit, geeignete Anknüpfungspunkte zwischen der Mathematik und ihrem Vorfeld herzustellen.[10] Er fordert also, den Bezug zwischen Mathematik und gegenwärtiger Gesellschaft aufrechtzuerhalten bzw. wiederherzustellen. Dazu können die im folgenden Abschnitt formulierten Gedanken einen Anstoß geben.

2.1.2 Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts

Verschiedene Allgemeinbildungskonzepte nahmen in den 1990er Jahren starken Einfluss auf die Diskussion um den Mathematikunterricht. Hier sind besonders die Positionen von HEYMANN und WINTER hervorzuheben. HEYMANN postuliert:

> „Die Annahme, daß die schulische Beschäftigung mit Mathematik per se allgemeinbildend sei, ist das verbreitetste Rechtfertigungsargument für den herkömmlichen Mathematikunterricht.“[11]

7 Platon: Protagoras. Zit. nach P. DAMEROW (1984), S. 21.
8 P. DAMEROW (1984), S. 22f.
9 Ebd., S. 36.
10 Vgl. ebd., S. 42f.
11 H. W. HEYMANN (1996), S. 153.

Inwieweit aber diese Allgemeinbildung durch den Mathematikunterricht evoziert wird, bedarf genauerer Erläuterung. WINTER formuliert dies so:

> „Da sich Schulunterricht […] als Fachunterricht versteht, muß jedes Fach der allgemeinbildenden Schulen öffentlich aufweisen und begründen, inwieweit es für Allgemeinbildung unentbehrlich ist.“[12]

Mit den von WINTER benannten und viel zitierten drei Grunderfahrungen, die der Mathematikunterricht ermöglichen sollte, ist die allgemeinbildende Funktion des Mathematikunterrichts trefflich umrissen:

> „(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
> (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
> (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“[13]

BORNELEIT et al. formulierten ergänzend dazu Leitlinien, die aus der programmatischen Orientierung an den drei Grunderfahrungen für den Mathematikunterricht erwachsen:

> „(L1) Grund- und Leistungskurse bedürfen gleichermaßen aller drei Grunderfahrungen. Leistungskurse dürfen sich nicht auf die zweite, Grundkurse nicht auf die erste Grunderfahrung beschränken.
> (L2) Jeder Lernbereich (Analysis, Analytische Geometrie, Stochastik) muss seine verbindlichen Inhalte als exemplarischen Beitrag zur Integration dieser drei Grunderfahrungen legitimieren.
> (L3) Die Betonung heuristischer Denk- und Arbeitsweisen relativiert die Bedeutung der formalen Fachsprache als Träger mathematischer Kommunikation. Zur Stärkung der natürlichen Sprache im Mathematikunterricht gehört die Philosophie von der »Wiederentdeckung des Inhaltlichen in einer neuen Unterrichtskultur«.“[14]

Mit diesen Stichpunkten sollte die anfängliche Frage nach dem Warum zum Mathematikunterricht in der Schule hinreichend – wenn auch nur kurz umrissen – beantwortet sein. Es ist wichtig festzustellen, dass diese Grunderfahrungen und Leitlinien nicht nur vom Mathematikunterricht *erfüllt werden sollten*, um eine Grundlage für seine Daseinsberechtigung als fester Bestandteil des Schulcurriculums darstellen zu können, sondern dass sie auch vom Mathematikunterricht *erfüllt werden können*. Erst dadurch wird die Mathematik zu einem nicht wegzudenkenden Bestandteil von Allgemeinbildung und Unterricht an allgemeinbildenden Schulen.

Und nicht nur die mathematischen Grundlagen sind erforderlich, um diese Grunderfahrungen zu ermöglichen. Somit bekommt auch der weiterführende Mathematikunterricht in der Oberstufe des Gymnasiums seine Berechtigung.

---

[12] H. WINTER (1995), S. 37.
[13] Ebd., S. 37.
[14] P. BORNELEIT et al. (2001), S. 28.

Mit folgender Ziel- und Begründungsvorstellung für allgemeinbildenden Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II von FÜHRER möchte ich diesen Abschnitt abschließen, da sie – wie ich finde – eine sehr plakative und stichhaltige Legitimation für den Oberstufenunterricht in Mathematik liefert:

> „Weiterführende Reine Mathematik klassifiziert Phänomene, Wahrnehmungsgestalten und Denkformen, und sie narrativiert sie […] in argumentativen Zusammenhängen. Dazu fixiert sie Abstraktionen und sucht nach logischen Abhängigkeiten zwischen diesen Abstraktionen, um sie kalkulierbar zu machen. Mathematik betreibt also zielbewußt Sprachschöpfung, kalkulierbare Metaphorik auf Vorrat sozusagen, deren sich unsere Alltagsvorstellungen längst bedient haben und deren sich künftiges Alltagsbewußtsein – vielleicht über die Vermittlung anderer Wissenschaften – bedienen mag. Mathematisieren heißt demnach Metaphorisieren, Assoziationen stiften und Wirklichkeiten im Bewußtsein ordnen, überschaubar und möglichst zuverlässig berechenbar machen. […] Weiterführender Mathematikunterricht vermittelt sprachlich-gedankliche Ordnungswerkzeuge, Metaphern und Theorieformen, deren Konnotationsreichtum über die ganze Zivilisationsgeschichte gereift ist. Mathematikunterricht enkulturiert, indem er die vorgefundene Metaphorik im kollektiven Bewußtsein zugleich verständlich macht und als kollektives Verständigungsmittel konserviert.“[15]

2.2. Geschichte des Mathematikunterrichts

Die Geschichte des Abiturs in Mathematik ist eng verknüpft mit der Gestaltung des Mathematikunterrichts in allen Schulformen und -stufen. Daher soll hier zunächst ein Überblick über die allgemeine Geschichte des Mathematikunterrichts gegeben werden.

Voranstellen möchte ich eine Definition für den Begriff „Unterricht“, um klar abgrenzen zu können, was im Folgenden unter „Mathematikunterricht“ zu verstehen ist. Dabei beziehe ich mich auf das Meyers-Lexikon, das Unterricht bezeichnet als

> „geplanter Lehr- bzw. Lernprozeß, in dem durch einen oder mehrere Lehrer an einen oder mehrere Schüler Wissen, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Handlungsweisen und Einstellungen in meist organisierter und institutionalisierter Form vermittelt werden.“[16]

Drei Aspekte sind hieraus aufzugreifen:

1. Unterricht als geplanter Prozess: d. h. Unterricht liegen Struktur und Ziel zugrunde (wie diese Planung – hier v. a. im Bezug auf abiturrelevante Themen in Mathematik – aussieht, zeigt → *Kapitel 2.4*).

2. Vermittlung von Wissen, Fähigkeiten, Fertigkeiten, Handlungsweisen und Einstellungen: d. h. es geht einerseits um Aneignung von Wissen, andererseits um den Umgang damit und die eigenständige Anwendung (zwei Forderungen, deren Gewichtung im Laufe der Zeiten unterschiedlich ausfiel, wie in den weiteren Betrachtungen festzustellen sein wird).

---

15 L. FÜHRER (1998), S. 505.
16 Meyers großes Taschenlexikon in 24 Bänden (^{4}1992), S. 24.

3. Unterricht in meist organisierter und institutionalisierter Form: Während die Vermittlung anfangs ausschließlich durch Beobachtung und Nachahmung stattfand, entwickelte sich bereits in frühgeschichtlicher Zeit eine von der Berufsausübung räumlich und zeitlich getrennte, systematische Berufsausbildung. Dazu entwickelten sich später eigenständige Institutionen, v. a. die Schule.

In diesem Abschnitt soll nun die Entwicklung des geplanten Unterrichts an der Schule der Neuzeit als eigenständiger, allgemeinbildender Institution dargestellt werden (Aspekte 1 und 3 seien also Voraussetzung für die betrachteten Formen des Unterrichts). Der zweite Aspekt steht dabei im Vordergrund der Beobachtung, inwiefern die einzelnen Vermittlungsaufgaben von Unterricht unterschiedlich gewichtet und beurteilt wurden.

2.2.1 Mathematik als Lehrgegenstand? Entwicklungen bis ins 18. Jahrhundert

Nach der Reformation wurden öffentliche Latein- bzw. Gelehrtenschulen eingerichtet, die den Anfangspunkt des allgemeinbildenden höheren Schulwesens in Deutschland markieren. Das Fach Mathematik war im 16. und 17. Jahrhundert an diesen Schulen nicht präsent;[17] entsprechend dem Grundprinzip des Protestantismus war die Fähigkeit zum Lesen und Schreiben und der Umgang mit der Heiligen Schrift das Ziel des Unterrichts.[18] Wenn es überhaupt eine Art von Mathematikunterricht gab, dann in der Regel als Astronomie-Unterricht. Der Geometrie-Unterricht war den Universitäten vorbehalten.

Mathematikunterricht in Form von Rechenunterricht gab es seit dem 17. Jahrhundert an den Bürgerschulen und Ritterakademien, wo er hauptsächlich im unreflektierten Auswendiglernen grundlegender Rechenfähigkeiten wie dem kleinen und großen Einmaleins bestand.[19] Doch selbst Ende des 18. Jahrhunderts gab es höhere Schulen, an denen selbst die Grundfertigkeiten des Rechnens nicht gelehrt wurden.[20] Es gab nur sehr wenige Gymnasien, z. B. die als akademische Gymnasien bezeichneten Schulen, an denen Mathematikunterricht fester Bestandteil des Fächerkanons war,[21] wobei der Unterricht

---

17 Vgl. F. GRUNDEL (1928), S. 73 und 106.
18 Vgl. G. SCHUBRING (1983), S. 26.
19 Vgl. G. SCHUBRING (1978), S. 38. ◊ Auch: http://ourworld.compuserve.com/homepages/KrausePlonka/ma_inf/ma_ge.htm (28.03.2006).
20 SCHWARTZ, Paul (1910): *Die Gelehrtenschulen Preußens unter dem Oberschulkollegium (1787–1806) und das Abiturientenexamen*, Bd. 1. Berlin. S. 37. Nach G. SCHUBRING (1983), S. 27.
21 Vgl. G. SCHUBRING (1983), S. 28.

v. a. auf praktische Verwendbarkeit des Stoffes, weniger auf das formalbildende Moment ausgerichtet war.[22] Die stoffliche Grundlage dieses Unterrichts wurde zum einen durch die Orientierung an der Antike mit der euklidischen Geometrie geschaffen, zum anderen stand sie in enger Verbindung mit ihren Anwendungsbereichen Astronomie, Geodäsie und Mechanik.[23]

Die Ideen Johann Friedrich Herbarts und Johann Heinrich Pestalozzis, die Kritik an der Situation des Mathematikunterrichts ihrer Zeit übten, waren Ausgangspunkt der Entwicklungen, die sich über das 19. Jahrhundert erstreckten.[24] Pestalozzi verurteilte das mechanische Auswendiglernen und betrachtete Mathematikunterricht als mehr denn als bloße Anwendung gelernter Rechenverfahren. Er betonte den Wert des Rechnens für die Ausbildung der Denkkraft. Der Mathematikunterricht solle an Anschauung anknüpfen und Einsicht vermitteln. GUMPERT stellt sechs wesentliche Elemente der Pestalozzischen Ansichten heraus:

> „• Der Mathematikunterricht ist Mittelpunkt, also wichtigster Bestandteil des gesamten Unterrichts.
> • Konkrete Anschauungsmaterialien aus dem Alltag (z. B. Erbsen, Steine, Murmeln, …) zur Verdeutlichung des Zahlbegriffs und der Operationen (wegnehmen = Subtraktion; hinzufügen = Addition, verteilen = Division, gleichwertiges Bündeln (z. B. 3 Sechserpäckchen = 3 mal 6)
> • Durchdenken statt simples Anwenden nicht verstandener Regeln.
> • Kopfrechnen zur Automatisierung und Förderung der Denkfähigkeit.
> • Klassenunterricht.
> • Vermittlung mathematischer Inhalte nach der Devise: vom Leichten zum Schweren.“[25]

Wenngleich diese Ideen vor allem auf den Volksschulbereich Einfluss nahmen, weisen sie doch auch den Weg zu den Entwicklungen der kommenden Jahrzehnte der höheren Schulausbildung, in denen der Neuhumanismus ein stärkeres Gewicht des Mathematikunterrichts mit sich brachte, bei dem neben dem stur praxisorientierten Rechnen die Vermittlung mathematisch-naturwissenschaftlicher Kenntnisse stärker in den Vordergrund trat.[26]

2.2.2 Aufwertung des Mathematikunterrichts Anfang des 19. Jahrhunderts

Mit der Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert entwickelte sich ein immer differenzierteres und umfassenderes Bildungssystem. Wenngleich das Abituredikt

---

22 Vgl. H. ATHEN (1977), S. 626.
23 A. MITSCHKA (1974), S. 144.
24 Vgl. H. ATHEN (1977), S. 626.
25 [GUMPERT, Nicolas:] http://www.dr-gumpert.de/html/geschichte_der_mathematik.html (28.03.2006).
26 Vgl. G. SCHUBRING (1978), S. 39, und H. ATHEN (1977), S. 626.

von 1788 (→*Kapitel 2.3.1*) noch keine Prüfungen in Mathematik und Physik vorschrieb, sahen die vorgedruckten Zeugnisformulare doch Eintragungen über Kenntnisse in Geometrie und Arithmetik vor.[27] Das preußische Oberschulkollegium drang immer wieder auf Einbeziehung der Mathematik in die Abiturprüfungen. Oftmals scheiterte diese Forderung aber allein an der Frage, ob überhaupt ausgebildete Mathematiklehrer zur Verfügung standen.

Für die Aufwertung des mathematischen Unterrichts waren die preußischen Schulreformen zu Beginn des 19. Jahrhunderts entscheidend. Der Süvernsche Lehrplan von 1816 nannte Mathematik neben Griechisch, Latein und Deutsch erstmals als obligatorischen Lehrgegenstand. Wilhelm von Humboldt sah den Mathematikunterricht 1809 gleichberechtigt neben den Sprachen und der Geschichte:

> „Sie [die Sektion für öffentlichen Unterricht] wird auf jeder gelehrten Schule, und hat hierzu schon den Anfang gemacht, den mathematischen und historischen Unterricht gleich gut mit dem in den Sprachen einrichten."[28]

Er räumte dem Mathematikunterricht mit bis zu 6 Wochenstunden (18,8 % der Gesamtstundenzahl von 60 aller Jahrgänge) einen so hohen Stundenanteil ein, wie er ihn nie wieder erreichen sollte.[29] Die Durchführung dieser hohen Forderungen dürfte allerdings mangels ausgebildeter Fachkräfte wohl kaum je realisiert worden sein.

Ausschlaggebend für die Einbindung der Mathematik in den Gymnasialunterrichtskanon war die sich wandelnde Einstellung zur Schule als allgemeinbildende Einrichtung (in klarer Trennung zur Universität), die nun erstmals einen umfassenden Bildungskanon aufstellte, aus deren Allgemeinbildungsauffassung die Mathematik nicht mehr wegzudenken war. Denn für die angestrebte allseitige Persönlichkeitsbildung war „die Einheit von klassischer, sprachlicher und moderner, wissenschaftlicher Bildung eine entscheidende konzeptionelle Bedingung".[30]

In engem Zusammenhang mit allgemeingesellschaftlichen Tendenzen wandelte sich nun das Verhältnis zwischen Wissenschaft und Bildung.

> „Die Beziehung von Erkenntnissubjekt und -objekt konnte nicht mehr auf ihre gegenstandslogische Seite verkürzt werden. Vielmehr wurde jetzt der enge Zusammenhang der inhaltlichen und sozialen Momente der Erkenntnistätigkeit als zwischen Subjekt und Objekt vermittelnder Beziehung deutlich. Das Verhältnis der Gesellschaft zum Wissen veränderte sich grundsätzlich."[31]

---

27 G. SCHUBRING (1983), S. 32.

28 Humboldt, Wilhelm von (1903): *Politische Denkschriften*. Gesammelte Schriften, Bd. X (Hg. B. Gebhardt). Berlin. S. 207. Zit. nach G. SCHUBRING (1983), S. 39.

29 Vgl. W. LIETZMANN (²1926), S. 216.

30 G. SCHUBRING (1983), S. 38.

31 G. SCHUBRING (1978), S. 48.

Dieser Wandel fand auch Niederschlag in der inhaltlichen Konzeption des Mathematikunterrichtes, der nun über das Grundrechnen hinausging und verschiedene Bereiche der Mathematik in sich vereinigte und in Beziehung zur Gesellschaft brachte (→ *Kapitel 2.4.*). Als Lehrbuch des vorwiegend geometrischen Unterrichts dienten Euklids „Elemente“, mit dem auch das Erklären und Beweisen als Unterrichtsziel einen höheren Stellenwert bekam. Andererseits wurde die Mathematik nun weiter von ihrer Anwendung entfernt gelehrt; es bildete sich das Bedürfnis heraus, die Inhalte des Unterrichts auch unabhängig von der Anschauung zu begründen.[32]

Die positiven Entwicklungen des Anfangs des Jahrhunderts wurden bald gedämpft, als nach 1821 konstatiert wurde, der Mathematikunterricht würde weit über seine Grenzen hinausgeführt und dränge die klassischen Fächer zu sehr zurück, die dem Gymnasium seinen Charakter gäben.[33] So wurden beispielsweise Differential- und Integralrechnung, die analytische Behandlung von Kegelschnitten sowie Reihenentwicklungen ganz aus dem Unterricht ausgeschlossen.

Als Folge heftiger Auseinandersetzungen bei der ersten sächsischen Direktorenkonferenz 1833 wurde die Verwendung eines Lehrbuches verbindlich gemacht, um den Unterricht zu effektivieren und den Umfang häuslicher Arbeiten einzuschränken.[34] Das neue Abiturreglement von 1834 reduzierte daraufhin erneut die inhaltliche Ausweitung des Mathematikunterrichts: Kegelschnitte und sphärische Trigonometrie wurden per Erlass vom 14. 12. 1834 ausdrücklich vom Unterricht ausgeschlossen. Vor allem durch den Wegfall der Kegelschnitte wurde dem Mathematikunterricht die analytische Geometrie als Basis für den mordernen Funktionsbegriff ein wesentlicher Pfeiler entzogen.[35] Außerdem wurde das Fach auf drei Wochenstunden in der Prima reduziert. All diese Einschränkungen sind auf Machtkämpfe der Fächer untereinander zurückzuführen und entsprangen nicht etwa innermathematischen Diskussionen.

Etwa zeitgleich spaltete sich nach 1826 der Mathematikunterricht in zwei Bereiche auf: die „Uebung im gemeinen Rechnen“[36] in den beiden unteren, und die Mathematik auf der Grundlage der Arithmetik in den Klassen Quarta bis

---

32 A. MITSCHKA (1974), S. 143.

33 Vgl. G. SCHUBRING (1983), S. 58f. ◊ (Auch für die weiteren Ausführungen zum Unterrichtsinhalt:) Reglement des Provinzial-Schulkollegiums zu Magedeburg vom 11. Oktober 1826; zit. bei L. v. RÖNNE (1855), S. 224f.

34 G. SCHUBRING (1983), S. 59.

35 Vgl. ebd., S. 59f.

36 Reglement vom 18. März 1826, zit. bei L. v. RÖNNE (1855), S. 229.

Prima.[37] Die Ursache dafür liegt im Schulsystem selbst, wo aufgrund mangelnder Vorbildung das Erlernen grundlegender Rechenfertigkeiten erst auf dem Gymnasium erlernt werden musste.

2.2.3 Herauslösung der Mathematik aus dem neuhumanistischen Bildungsbegriff

In den 1840er Jahren zeigten sich Bestrebungen, die hohe Stellung, die die Mathematik im ursprünglichen neuhumanistischen Bildungskonzept eingenommen hatte, weiter zurückzudrängen. „Idealismus“ und „Materialismus“ wurden als gegensätzliche Zeitströmungen wahrgenommen. Das bedeutete eine Verdrängung der Mathematik aus dem idealistisch geprägten Gymnasium, dessen Schwerpunkt nach wie vor die klassischen Sprachen bildeten. Dafür bildete die Mathematik nun für die materialistische Richtung der Realschulen die Basis.[38]

Diese Trennung zwischen Gymnasium und Realschule spiegelt sich in den Forderungen des Normalplans und des Abiturreglements für die Gymnasien 1856 und dem Lehrplan von 1859 für die Realschulen wider. Im Gymnasium wurde der Anteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts stark zurückgedrängt, die Naturwissenschaften wurden sogar ganz aus dem Abitur gestrichen. Dahingegen gewannen Mathematik und Naturwissenschaften an den Realschulen eine starke Stellung. Der Mathematikunterricht basierte auf Inhalten der angewandten Mathematik: „Kegelschnitte, angewandte Mathematik und darstellende Geometrie wurden Abiturstoff.“[39] Daneben wurde als neuer Bereich des Mathematikunterrichts bereits seit den 1840/50er Jahren an einzelnen Gymnasien analytische Geometrie betrieben, indem im Anschluss an die Gleichungen *n*-ten Grades graphische Darstellungen angefertigt wurden.[40]

Unter den Mathematiklehrern gab es nur wenige, die diese Entwicklungen zu Ungunsten des gymnasialen Mathematikunterrichts gutheißen konnten, sahen sie doch die Mathematik in ihrer „formellen“ und „materiellen“ Bildungsfunktion als unerlässlich für den Einheitsschulcharakter des Gymnasiums.[41] Zudem zeigte sich eine geringere Wertschätzung der „materiellen“ Bildungsrichtung in der „Zweitklassigkeit“ der Realanstalten. Diese Ungleichheit zwischen Gym-

---

37 Vgl. G. SCHUBRING (1983), S. 60ff (Kapitel 5.6.).
38 Vgl. ebd., S. 74.
39 Ebd., S. 76.
40 W. LIETZMANN (²1926), S. 252.
41 Vgl. G. SCHUBRING (1983), S. 77.

nasien und Realgymnasien wurde Ende des 19. Jahrhunderts allmählich aufgehoben. So wurde durch die neuen Lehrpläne 1892 das Pensum des Mathematikunterrichts an den Realgymnasien stark zurückgenommen, waren diese doch zuvor teilweise „zu reinen Fachschulen ausgeartet“[42].
Erst mit den neuen Lehrplänen von 1901/02 war die Gleichberechtigung aller höheren Lehranstalten erreicht.

2.2.4 Pädagogisierung des mathematischen Unterrichts

Bis etwa 1870 konnte von pädagogisch sinnvoller und didaktisch durchdachter Gestaltung des Mathematikunterrichts keine Rede sein. Ohne auf methodische Stringenz zu achten, wurden „Lehrsätze und Beweise […] dogmatisch in strenger Systematik und weitgehend fern den praktisch möglichen Problemen vorgetragen.“[43] Zwar strebten schon Pestalozzi und Herbart an, beim Unterrichten nach pädagogischen Gesichtspunkten zu handeln, doch trat das echte Bedürfnis nach der Beschäftigung mit Lehrmethoden an den Schulen erst viele Jahre später auf. Felix Klein, damals Professor für Mathematik an der Universität Göttingen, und wichtigster Vertreter der Reform von 1901, schrieb dazu:

> „Statt der früheren Systematik wünscht man eine genetische Anordnung des mathematischen Lehrstoffs[44], eine analysierende Beweisführung, einen heuristisch gegliederten Vortrag, – alles mit bewußter Anpassung an die noch unentwickelte Fassungskraft des Schülers, den man nicht ‚überbürden‘ darf.“[45]

Diese Bestrebungen fanden ihren ersten Niederschlag in den Bonitzschen Lehrplänen von 1882. Großen Wert wurde nun auch auf das Raumvorstellungsvermögen der Schüler gelegt, d. h. dass dem Zeichnen und Veranschaulichen große Bedeutung gegeben wurde.
Parallel dazu verlangte die schnelle technische Entwicklung der Zeit nach einer Entsprechung im schulischen Unterricht, um durch Anwendung eine Verbindung zwischen formaler Mathematik und praktischem Nutzen zu ziehen. Diese Bestrebungen fanden Niederschlag in den „Braunschweiger Beschlüssen“ von 1891:

> „Die Schüler der höheren Lehranstalten sind im allgemeinen noch zu wenig imstande, das Mathematische in den sich ihnen im Leben darbietenden Erscheinungen zu erkennen, und zwar ist die Ursache davon vorzugsweise in dem Umstande zu suchen, daß die Anwendungen der mathematischen Theorien vielfach in künstlich gemachten Beispielen bestehen, anstatt sich auf die Verhältnisse zu beziehen, welche sich in der Wirklichkeit darbieten. Daher muß das System der Schulmathema-

[42] M. SIMON (²1908), S. 19.
[43] E. SCHUBERTH (1971), S. 10.
[44] [Zum genetischen Prinzip siehe G. SCHUBRING (1978).]
[45] Zit. nach E. SCHUBERTH (1971), S. 10.

> tik, unbeschadet seiner vollen Selbständigkeit als Unterrichtsgegenstand, im einzelnen mit Rücksicht auf die sich naturgemäß darbietende Verwendung (Physik, Astronomie etc., kaufmännisches Rechnen) aufgebaut werden. Die demgemäß heranzuziehenden Beispiele sollen die Schüler daran gewöhnen, in dem sinnlich Wahrnehmbaren nicht nur Qualitatives, sondern auch Quantitatives zu beobachten, in einem solchen Grade, daß ihnen eine solche Betrachtungsweise dauernd zum unwillkürlichen Bedürfnis wird.“[46]

Damit sind zwei wesentliche Punkte der Erneuerung des Mathematikunterrichts benannt, die ich schlagwortartig als „Anpassung an den Schüler“ und „Anpassung an die Lebenswelt“ bezeichnen möchte. Dabei umfasst „Lebenswelt“ Bereiche der Technik genauso wie die ganz unmittelbare (auch nicht technisierte) Lebensumwelt der Schüler.

2.2.5 Kleinsche Reform und Meraner Vorschläge

Diese Bestrebungen nahmen auf die neuen Lehrpläne von 1901 Einfluss, wenngleich diese noch nicht grundlegend Neues beinhalteten. Ausgangspunkt der neuen Pläne war die sogenannte Junikonferenz, die das preußische Ministerium 1900 zusammengerufen hatte. Ihr wichtigster Vertreter war bereits oben erwähnter Felix Klein, der die Reformbewegungen der folgenden Jahre maßgeblich beeinflusste und vorantrieb, und nach dem die Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts von 1900 bis zu ihrem vorläufigen Abschluss in Form neuer Richtlinien 1925 „Kleinsche Reform“ bezeichnet wird.[47] Die Beratungen der Junikonferenz hatten zu den amtlich bis 1924 gültigen preußischen Lehrplänen von 1901 geführt.[48] Sie konnten die in → *Kapitel 2.2.4* beschriebenen Punkte der Erneuerung nur in geringem Maße verwirklichen, wenngleich sie dem Lehrer nach Kleins Aussage größere Freiheit als zuvor gaben.[49]

Wichtige methodisch-inhaltliche Forderungen wurden ausgehend von Klein nach 1902 laut: das Lernziel an den höheren Lehranstalten sei dahingehend zu ändern, dass die Infinitesimalrechnung in den verbindlichen Unterricht an den Realanstalten aufgenommen werde. Auf einem Vortrag in Göttingen forderte Klein 1904: „Die vorbereitende Darlegung des Funktionsbegriffs […] und die erste Einführung in die analytische Geometrie und die Anfänge der Differential- und Integralrechnung sollten allen Arten höherer Schulen gemeinsam sein.“[50]

---

46 Zit. nach E. SCHUBERTH (1971), S. 11.
47 Ebd., S. 13.
48 W. LIETZMANN (²1926), S. 226.
49 Vgl. E. SCHUBERTH (1971), S. 13.
50 Zit. nach W. LIETZMANN (²1926), S. 226.

Daraufhin entwarf eine Unterrichtskommission der Naturforscherversammlung, der wiederum Klein angehörte, in Breslau 1904 Vorschläge, die ein Jahr später der Versammlung in Meran vorgelegt wurden. Sie sind als die „Meraner Vorschläge" bekannt geworden. Ihr Verdienst war es, konkrete Lehrplanentwürfe zu verfassen und in Bezug zu organisatorischen und methodischen Forderungen zu bringen.
Einer der wichtigsten Punkte war die ursprünglich ausschlaggebende Einführung der Infinitesimalrechnung. Umso bedauerlicher erscheint es, dass die letztendlich ungenaue Formulierung, die Schule solle „an die Schwelle der Infinitesimalrechnung heranführen", weit hinter dem anfänglich geforderten Ziel blieb und keine verbindliche Einführung der Infinitesimalrechnung forderte.
Wenngleich die Meraner Reformvorschläge bald vor allem im Mathematikunterricht der Realschulen Niederschlag fanden, führten sie noch lange nicht zur Formulierung neuer Lehrpläne. Mit der praktischen Durchführung der Reformideen beschäftigte sich der 1908 gegründete Deutsche Ausschuss für den mathematischen und natruwissenschaftlichen Unterricht (DAMNU). Es sollte, verzögert durch die Auswirkungen des Ersten Weltkrieges, noch bis 1917 dauern, dass der DAMNU einen mit methodischen Bemerkungen versehenen mathematischen Lehrplan vorlegte, der 1922 veröffentlicht wurde und unter der Bezeichnung „revidierte Meraner Lehrpläne" bekannt wurde. Dieser Lehrplan wurde nun in die alle Lehranstalten umfassenden Lehrpläne von 1925 leicht verändert übernommen.
LIETZMANN, der selber an der Formulierung der Pläne maßgeblich beteiligt war, fasst die drei hauptsächliche Gedanken der Meraner Vorschläge zusammen, die hier stichpunktartig wiedergegeben werden sollen:[51]

• Das **psychologische Prinzip**: der Lehrgang sei „mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen", d. h. die allmähliche Entwicklung von den anschaulichen Modellen der Raumlehre oder eines propädeutischen Kurses hin zu den abstrakten, deduktiven Verfahren;
• das **utilitaristische Prinzip**: das Bestreben, die Schüler zur mathematischen Erfassung der Wirklichkeit zu erziehen;
• das **didaktische Prinzip**: die Forderung, den Lehrstoff „um einen großen Gedanken zu konzentrieren". Als Bindemittel diente der Funktionsbegriff, der als verbindender Gedanke den gesamten Schulstoff systematisch durchdringen sollte.

51 Siehe W. LIETZMANN (²1926), S. 229f.

Bezugnehmend auf den zweiten Punkt aus →*Kapitel 2.2.4* („Anpassung an die Lebenswelt) möchte ich besonders die Formulierung der Meraner Vorschläge hervorheben, dass

> „unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik doch auf alle einseitigen und praktisch bedeutungslosen Spezialkenntnisse zu verzichten, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung zu bringen [sei].“[52]

Damit war der Mathematikunterricht seiner rein formalen, von außermathematischen Bereichen isolierten Position enthoben und gewann Zugang zur Anwendung in der unmittelbaren Erfahrungsumwelt der Schüler, ohne damit die „Aufgabe der logischen Schulung“[53] des Unterrichts zu vernachlässigen. Als „Sonderaufgaben“ in der didaktischen Umsetzung sind

– „die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens“ und

– „die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“[54]

hervorgehoben. Mit der Festsetzung dieser Aufgaben sollte die Verknüpfung von wissenschaftlicher Entwicklung und Schulmathematik erreicht werden.

2.2.6 Mathematikunterricht im Nationalsozialismus

Die so erlangten Neuerungen der Mathematikdidaktik wurden in ihrer Auswirkung durch den Nationalsozialismus verhindert.[55] Die Betonung des utilitaristischen Prinzips (vgl. oben) und gleichzeitige Vernachlässigung der anderen Aufgaben des Mathematikunterrichts ab 1933 bedeutete einen sehr einseitigen Blick auf die Mathematik und stellte damit ihren Bildungswert in Frage. Es wurde davor gewarnt, dass zuviel Mathematik zu einem blutleeren Intellektualismus führen könne, der jüdischer Art sei.[56]

War die Mathematik weniger als die geisteswissenschaftlichen Fächer gegen propagandistische Elemente nationalsozialistischer Ideologien anfällig, so wurde ihr doch gerade ihre Abstraktheit und scheinbare Unabhängigkeit von möglichen Anwendungen zur Last.[57] So meinte der Physiker und Nobelpreisträger Philipp Lenard, es sei gewiss nicht gut, der Geisteswissenschaft Mathematik „mit allen ihren neuesten Verzweigungen einen breiten Raum in den Schulen zu überlassen“.[58] Einer damit grundgelegten Zurückdrängung des Mathematikunterrichts konnte entgegnet werden, indem die Mathematik sich

---

52 Zit. nach E. SCHUBERTH (1971), S. 16f.
53 Vgl. Meraner Vorschläge, zit. nach ebd., S. 17.
54 Ebd.
55 H. ATHEN (1977), S. 626.
56 Behr, Reinhart: http://www.reinhart-behr.de/leben/leben505.htm (22.04.2006).
57 Vgl. V. PECKHAUS (2001), S. 61.
58 Zit. nach ebd., S. 61.

selbst eine ideologische Rechtfertigung gab („Selbstgleichschaltung“), um ihre Funktion im schulischen Bildungskanon ideologischer Prägung zu behaupten.[59]

So gehörte es zu den vordersten Bestrebungen des „Mathematischen Reichsverbandes“ unter Leitung seines Vorsitzenden Georg Hamel, den Mathematikunterricht formal an den Zeitgeist anzupassen; so betonte Hamel 1933: „wir haben zu dienen und nicht zu fordern.“[60] Auch die Sitzung des „Mathematischen Reichsverbandes“ 1934 unter dem Titel „Der mathematische Unterricht im Dritten Reich: was verlangen Allgemeinheit und Hochschule heute von dem mathematischen Unterricht an der höheren Schule und wie kann diese den Forderungen gerecht werden“ betonte nachhaltig die „Unverzichtbarkeit einer fundierten mathematischen Ausbildung“.[61] Wichtig war auch der Hinweis auf die Bedeutung der Mathematik für das Wehrwesen.[62] Insgesamt entwickelte sich ein Stil der völkisch gebundenen Mathematik mit konkreten Anknüpfungspunkten an die ideologischen Anforderungen des politischen Umfeldes.

Die Zeit des Nationalsozialismus war wohl „zu kurz“, als dass sich diese Veränderungen nachhaltig in den Schulbüchern und Aufgabensammlungen hätten etablieren können, wenngleich viele Lehrbücher bis zum Erlass der neuen Lehrpläne von 1937/38 im nationalsozialistischen Sinn überarbeitet worden waren. Ein besonders erschreckendes Beispiel NS-ideologisch durchdrungener Aufgabenstellungen zeigt ein Mathematikbuch der Zeit:

> „Aufgabe 97: Ein Geisteskranker kostet täglich etwa 4 *RM*, ein Krüppel 5,50 *RM*, ein Verbrecher 3,50 *RM*. In vielen Fällen hat ein Beamter täglich nur etwa 4 *RM*, ein Angestellter kaum 3,50 *RM*, ein ungelernter Arbeiter noch keine 2 *RM* auf den Kopf der Familie.
> a) Stelle diese Zahlen bildlich dar.
> Nach vorsichtigen Schätzungen sind in Deutschland 300 000 Geisteskranke, Epileptiker usw. in Anstaltspflege.
> b) Wieviel Ehestandsdarlehen zu je 1 000 *RM* könnten – unter Verzicht auf spätere Rückzahlung – von diesem Geld jährlich ausgegeben werden?“[63]

Fast humoristische Züge erhielt der „Verdeutschungs-Drang“, der auch vor mathematischen Fachbegriffen fremdländischer Herkunft keinen Halt machte, so dass etwa der „Radikand“ einer Wurzel zum „Wurzling“, die „Koordinaten“

---

59 Vgl. V. PECKHAUS (2001), S. 62f und 67ff.
60 Zit. nach ebd., S. 68.
61 Ebd., S. 71.
62 Vgl. ebd., S. 72. ◊ W. LIETZMANN / U. GRAF (1941), S. 33: „Die Wehrwissenschaften stellen dem [Mathematik-]Unterricht ein wichtiges Anwendungsgebiet zur Verfügung“.
63 Dorner, Adolf (Hg.) (1935): *Mathematik im Dienste der nationalpolitischen Erziehung*. S. 42. Frankfurt/Main.

zum „Punktzeiger“, die „Ellipse“ zur „Eie“ oder die „Asymptote“ zur „Zielgeraden“ wurde.[64]

2.2.7 Entwicklungen nach 1945 – Die Neue Mathematik und ihre Folgen

Mit dem politischen und gesellschaftlichen Neuanfang nach dem Ende des nationalsozialistischen Regimes stand auch der Mathematikunterricht vor der Frage nach einer Neuorientierung. Mit seinem Bemühen um eine „innere Erneuerung“ des Mathematikunterrichts nach dem Zweiten Weltkrieg ist besonders M. Wagenschein zu nennen. Die Situation des traditionellen Mathematikunterrichts, die er vorfand, lässt sich prägnant durch zwei Stichworte charakterisieren:

– die „Aufgabendidaktik“ [65], also einem Unterrichtsprinzip, das vorwiegend auf einer Sammlung von Aufgabentypen und deren Lösungsgängen aufbaut, und

– den „Enzyklopädismus“ bzw. das „enzyklopädische Prinzip“, das eine Stofffülle (in allen Fächern) bedeutete, die zu Lasten von Problembewusstsein und Durchblick auf das Wesentliche gingen.[66]

Die von Wagenschein entwickelte didaktische Idee des neuen Mathematikunterrichts basierte auf „Pfeilern“, die „als ‚exemplarische‘ Modelle das Ganze repräsentieren und nach sokrat. Vorbild im ‚genetischen‘ Verfahren erarbeitet werden“, d. h. zwischen denen dann im zweiten Schritt Querverbindungen gezogen werden.[67] Diese Idee fand im Mathematikunterricht des Gymnasiums allerdings keinen so großen Niederschlag wie im Volksschulbereich, da die mathematische Fachdidaktik eher von der Umgestaltung des Stoffes als von der pädagogischen Aufgabe fasziniert war.[68]

Unter dem Druck der mathematischen Wissenschaft entwickelte sich nach 1955 eine ganz neue Richtung der Mathematikdidaktik, die unter dem Begriff „Neue Mathematik“ geführt wird. Zwei wesentliche Neuerungen bereiteten den Weg für diese Veränderungen: zum einen war es das Durchsetzen des Abbildungsgedankens im Geometrieunterricht, andererseits die Einführung der vektoriellen Methode in der analytischen Geometrie.[69] Diese neuen Bestrebun-

---

64 Behr, Reinhart: http://www.reinhart-behr.de/leben/leben505.htm (22.04.2006). ◊ Vgl. auch Anhang „Verdeutschung mathematischer Fachausdrücke“ in W. LIETZMANN / U. GRAF (1941), S. 135ff.

65 Dieser Begriff wurde geprägt durch Helge Lenné (1969): *Analyse der Mathematik-Didaktik in Deutschland*. Stuttgart.

66 A. MITSCHKA (1974), S. 145. ◊ H.-R. LAURIEN (1998), S. 36.

67 A. MITSCHKA (1974), S. 145.

68 Ebd., S. 145.

69 Ebd., S. 145.

gen, die über die OECD auch internationale Auswirkungen hatten, bildeten die Grundlage der sog. Nürnberger Lehrpläne von 1965 mit einem Rahmenplan für den Mathematikunterricht und führten 1968 zu den für alle Bundesländer verbindlichen „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen" der KMK.[70] Unterstützt wurden den Entwicklungen durch die verbesserte Lehrerausbildung an den Universitäten, an denen nun nach und nach didaktische Seminare und Lehrstühle für Didaktik der Mathematik eingerichtet wurden. Besonders hervorzuheben ist die Gründung des „Instituts für die Didaktik der Mathematik" an der Universität Bielefeld im Jahr 1970, das wesentlichen Einfluss auf die Gestaltung der heutigen Schulmathematik nahm.

Die in der Neuen Mathematik verankerten fachspezifischen Bildungsvorstellungen drückten sich in einer präzisen Fachsprache aus, die Abbild einer geklärten Rationalität als Zielsetzung war und das charakterbildende Element des Mathematikunterrichts nurmehr als nachrangiges Ziel sah. Die von LIETZMANN in den Meraner Vorschlägen als „psychologisches Prinzip" gekennzeichnete Orientierung an Vorerfahrungen und Lernprozessen der Schüler (vgl. → *Kapitel 2.2.5*) verlor mit der objektiven Ausrichtung der Neuen Mathematik an Bedeutung.[71]

Die inhaltlichen Kernpunkte der „Empfehlungen" von 1968 fasst MITSCHKA zusammen:

> „Der Mengenbegriff ist von Anfang an Grundlage und bleibt immer wiederkehrender Bezugspunkt. Das Umgehen mit Zahlen wird nicht als ‚Rechnen' isoliert, sondern schon in den ersten Sch[uljahren] mit M[athematik] durchtränkt (Kardinalzahlbegriff, operative Verknüpfungen, Stellenwertsystem). Die Zahlbegriffserweiterungen werden jeweils als Einbettungen in umfassendere Strukturen klargelegt. Die Gleichungslehre wird in einen allg. Zusammenhang mit der Logik gebracht […]. Der Funktionsbegriff wird von vornherein in seiner allg. Bedeutung als Zuordnung (Abbildung) verstanden. Die algebraischen Strukturbegriffe Gruppe, Ring, Körper werden bereits in der Mittelstufe eingeführt und in der Oberstufe noch einmal vertieft. Die Geometrie wird aus den Abbildungsgruppen entwickelt und in der vektoriellen Methode algebraisiert. In der Analysis hebt sich die schärfere Fassung der grundlegenden Begriffe (reelle Zahlen, Grenzwert, Stetigkeit) heraus. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik werden als zentrale Disziplinen der angewandten M[athematik] verbindlich. Als krönender Abschluß erscheint ein Beispiel der axiomat. Behandlung einer endlichen oder nichteuklid. Geometrie."[72]

So sehr die Ideen der Neuen Mathematik zunächst auf Begeisterung stießen, so sehr wuchs ab Mitte der 1970er Jahre die Erkenntnis, dass die reine Verwissenschaftlichung der Schulmathematik auch nicht das Rezept für „erfolgreichen" Mathematikunterricht sein könne. Es wuchs die Einsicht,

---

70 A. MITSCHKA (1974), S. 145. ◊ H. ATHEN (1977), S. 626.
71 Vgl. U.-W. TIETZE et al. (²2002), S. 219.
72 A. MITSCHKA (1974), S. 146.

> „daß vor allem den Anwendungen und den fundamentalen Ideen mehr Aufmerksamkeit geschenkt und lehr-lerntheoretische Überlegungen bei der Curriculumentwicklung berücksichtigt werden müssen.“[73]

In diesem Sinne forderte die Deutsche Mathematiker-Vereinigung in einer Denkschrift von 1976, dass

> „das Verständnis der für ein Gebiet typischen Probleme, Grundgedanken und Methoden, das Verständnis des Inhalts eines Satzes und der Grundidee eines Beweises unbedingt den Vorrang behalten muß vor formaler Exaktheit und Vollständigkeit. […] Die Schüler sollen die Notwendigkeit eines Beweises sehen.“[74]

Hervorzuheben ist die Position von W. Blum und A. Kirsch von 1979, die eine „Stufung der Strenge“ fordert. Das bedeutet, dass die Wissenschaft nicht der Schulmathematik übergestülpt wird, sondern dass es um das verständige Herangehen an den Stoff geht, ohne von Anfang an auf Exaktheit der Methode zu achten; erst nach und nach können Methoden und Begriffe exaktifiziert werden, wenn das Grundprinzip verstanden ist. Dabei wird die Einbeziehung der Geschichte der Mathematik als Verständnisgrundlage zur Genesis eines Stoffes empfohlen.[75]

In den 1980er Jahren bildeten sich Positionen gegen das in Folge der Neuen Mathematik Vorherrschen „sinnentleerter Kalküle“ heraus. Der Mathematikunterricht sollte sich neu orientieren, um anstatt des anspruchsvollen, routineartigen, stoffüberfüllten Unterrichtswesens Anknüpfungspunkte zu außermathematischen Sinnzusammenhängen zu ermöglichen. Die wichtigsten Punkte dieser Neuorientierung waren die der Problemorientierung und der Anwendungsorientierung. Hinzu kam die Weiterentwicklung der elektronischen Möglichkeiten, so dass dem Schüler durch den Einsatz von Taschenrechnern und Computerprogrammen rein technische Rechenvorgänge abgenommen werden konnten, um die gewonnene Zeit zur Anwendung heuristischer Strategien und Problemlösemethoden zu nutzen. Auf diesem Weg sind besonders die Beiträge H. W. HEYMANNS sowie von H. WINTER, R. DANCKWERTS und D. VOGEL zu nennen, die bereits in →*Kapitel 2.1* angeschnitten wurden. Inwieweit sich diese Ideen im Schulalltag bewähren werden, wird erst in einigen Jahren bewertet werden können. Doch nach meiner Meinung ist damit der richtige Schritt gemacht, um – wie DAMEROW fordert (vgl. →*Kapitel 2.1.1*) – den Bezug zwischen Mathematik und gegenwärtiger Gesellschaft aufrechtzuerhalten.

---

73 U.-W. TIETZE et al. (²2002), S. 220.
74 Zit. nach ebd., S. 220.
75 Vgl. ebd., S. 64 und 220f.

2.3. Reifeprüfung bzw. Abitur als Schulabschluss

Der Titel, den ich diesem Kapitel gegeben habe, bezeichnet das Abitur als „Schulabschluss". Das lässt die Frage aufkommen, inwieweit der Abschluss der Schullaufbahn die Funktion des Abiturs bestimmt, oder ob nicht vielmehr die damit erlangte Zugangsberechtigung zur Hochschule („Hochschulreife") den wesentlichen Charakter dieser Prüfung ausmacht. LAURIEN formuliert im Lexikon der Pädagogik:

> „In der R[eifeprüfung] (= Abitur, Matura) soll die Studierfähigkeit (als allgemeine HSR. unbeschränkt, als fachgebundene HSR. auf bestimmte Studien begrenzt) und der Abschluß eines Ausbildungsganges nachgewiesen werden."[76]

Damit sind beide Funktionen der Abiturprüfung benannt, nur mit der Verallgemeinerung, dass das Abitur nicht zwingend an der Schule abgelegt werden muss, sondern auch an anderen Einrichtungen unter Zuständigkeit des Kultusministeriums erlangt werden kann.

Ein Blick auf die Geschichte des Abiturs, wie er in diesem Kapitel gegeben werden soll, zeigt auch die verschiedenen Schwerpunktsetzungen, die das Abitur im Laufe der Zeiten erfuhr. Anfang des 20. Jahrhunderts gab es sogar Gedanken zur Abschaffung des Abiturexamens, der sog. „Schulreife ohne Prüfung".[77]

Dass ich trotz dieser Doppelfunktion des Abiturs diese Kapitelüberschrift gewählt habe, hängt v. a. mit der Ausrichtung dieser Arbeit zusammen, die das Abitur in erster Linie in Verbindung mit dem vorangegangenen Schulstoff sieht und auf schulmathematik-didaktische Fragen eingehen möchte. Außerdem ist spätestens seit dem dritten Abiturreglement von 1834 (→*Kapitel 2.3.2*) die Abiturprüfung Sache der Schule, und nicht der Universität – im Übrigen ein charakteristisches Merkmal des deutschen Abiturs, wie ein Vergleich mit den Abschluss- und Zugangsregelungen anderer Staaten zeigt.[78]

Die folgenden Abschnitte sollen das Abitur zunächst unabhängig vom Fach Mathematik betrachten.

2.3.1 Die Anfänge des Abiturs

Das Jahr 1788 kann als Anfangspunkt der Abiturgeschichte bezeichnet werden. Schon früher existierte ein Prüfungswesen, das aber nicht den Charakter

---

76 H.-R. LAURIEN (1974), S. 403. Unter dem Artikelbegriff ist „HSR. = Hochschulreife" angegeben. Die Autorin findet auch in vergleichbaren Lexika und Wörterbüchern dementsprechende Formulierungen.

77 So bspw. M. SIMON (²1908), S. 199: „[…] auch wenn, was zu hoffen steht, das Examen selbst aufhört."

78 Vgl. dazu A. WOLTER (1989), S. 28ff.

einer schulischen Abschlussprüfung als Zugangsberechtigung zur Hochschule hatte und zudem nicht einheitlich geregelt war.

In dieser Zeit setzte sich der Hauptanteil der Studenten aus Söhnen des Handwerkerstandes und des gebildeten Bürgerstandes zusammen, „die zur Erhaltung ihres sozialen Status auf das Studium angewiesen waren“[79]. Soziale Voraussetzungen nahmen Einfluss auf die Entscheidung zum Hochschulstudium und viele der Studenten waren für eine solche Ausbildung gar nicht geeignet. So beklagte Karl-Christoph von Hoffmann, Kanzler der Universität Halle 1787,

> „daß sich unter den jungen Leuten, welche die Universitäten beziehn, beständig eine nicht geringe Anzahl von solchen Subjecten befindet, die nicht allein in den beyden sogenannten gelehrten Sprachen [Griechisch und Latein], sondern auch in den übrigen noch wichtigeren Vorkenntnissen, die sie von der Schule mitbringen sollten, so unwissend sind, daß ihre Unwissenheit bald Mitleiden, und bald Widerwillen erregen muß […].“[80]

Damit ging eine Überfüllung der Universitäten einher, die ein geregeltes Studium stark erschwerte.[81] Zwar gab es Abschlussprüfungen an einigen Schulen; diese dienten jedoch weniger der Leistungsüberprüfung der Schüler, als vielmehr der Zurschaustellung der Schule und ihrer Leistungen.[82]

Vor dem Hintergrund dieser Verhältnisse entstanden in den 1780er Jahren Pläne zur Einrichtung eines geregelten Prüfungswesens, das den Hochschulzugang einerseits an die schulischen Leistungen binden und andererseits von sozialen Standeszugehörigkeiten lösen sollte. (Natürlich ging es bei allen Überlegungen nur um die Frage der Männerausbildung; bis zum Abitur für Frauen mussten noch über hundert Jahre vergehen, vgl. → *Kapitel 4.1.2.*)

Das Ergebnis der Verhandlungen war das preußische Abiturreglement von 1788. Das erste Edikt vom 23. Dezember 1788 legte fest, dass Schüler beim Abgang von öffentlichen Schulen zur Universität ein

> „detailliertes Zeugniß über ihre bey der Prüfung befundene Reife oder Unreife erhalten sollen, welches Zeugniß sie demnächst bey ihrer Inscription auf der Universität zu produciren haben, damit es dort ad Acta gelegt, und künftig bey ihrem Abgang von der Universität in ihrem academischen Zeugniß resumirt werden könne.“[83]

Damit übernahm die Schule die Aufgabe der Universitätsprüfung *pro immatriculatione*, die seit 1718 üblich, in ihrer Durchführung aber nicht beson-

---

79 K.-E. JEISMANN (1974), S. 102.
80 Zit. nach A. WOLTER (1989), S. 6.
81 Zur Überfüllungsthese siehe: Herrlitz, Hans-Georg (1973): *Studium als Standesprivileg. Die Entstehung des Maturitätsproblems im 18. Jahrhundert*. Frankfurt/M. ◊ N. KAMP (1988), S. 34ff.
82 Vgl. K.-E. JEISMANN (1974), S. 103.
83 Zit. nach N. KAMP (1988), S. 266 (Faksimile-Abdruck).

ders erfolgreich gewesen war. Durch die neue Schulabschlussprüfung wurde als Nebeneffekt auch eine einheitlichere Regelung des Schulsystems notwendig, das die Voraussetzungen zur Abiturprüfung bieten musste. So wurde das Abitur in der Folgezeit

> „zum entscheidenden Instrument der preußischen Bildungsverwaltung, um das an der Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert institutionell noch sehr heterogene, inhaltlich veraltete, in seinen Grundstrukturen auf die Reformationszeit zurückgehende Latein- und Gelehrtenschulwesen in das neue humanistische Gymnasialwesen umzugestalten."[84]

Noch fehlte jede Bestimmung der Prüfungsgegentände (vgl. →*Kapitel 3.1.1*), so dass die Schulen recht freies Spiel in der Gestaltung der Prüfung und ihrer Inhalte hatten. Eine gewisse Kontrolle war allerdings durch die Anwesenheit eines Mitgliedes des Provinizialschulkollegiums bei den Prüfungen gewährleistet. Nach Ablegen der Prüfung erhielt jeder Schüler ein Zeugnis der Reife oder der Unreife, wobei letzteres allerdings nicht vom Hochschulstudium, sondern lediglich von staatlichen Stipendien ausschloss. Daneben führten die Universitäten teilweise weiterhin Aufnahmeprüfungen durch, um auch diejenigen Schüler zu prüfen, die bisher noch kein Abitur an einer Schule abgelegt hatten, speziell Schüler von privaten Gelehrtenschulen oder jene, die zuvor durch Privatunterricht auf das Studium vorbereitet wurden.

Die Umsetzung des Abiturreglements geschah zunächst schleppend. Wenngleich das Reglement anfangs nur wenig Wirkung zeigte, leitete es doch eine Entwicklung ein, die die Grundlage des heutigen Abiturs bildet: „Anstelle von Geburt und Stand sollten Bildung, Fleiß, Leistung als Voraussetzungen für den erworbenen Status einer ‚Elite' treten."[85]

2.3.2 Entwicklung der Abiturprüfungen im 19. Jahrhundert

Das zweite Abituredikt „Wegen Prüfung der zu den Universitäten übergehenden Schüler" aus dem Jahre 1812 markiert einen weiteren wichtigen Schritt in der Abiturgeschichte. Den Anstoß für die Reformentwicklungen eines staatlichen Prüfungswesens der frühen Jahre des 19. Jahrhunderts gab Wilhelm von Humboldt, wenngleich er selber die Funktion der Prüfung eher in der „Selbstkontrolle der Wissenschaft" als einer staatlichen Kontrolle sah.[86] Das Abituredikt (am 25. Juni 1812 verkündet, am 12. Oktober 1812 bestätigt) war nach der Einführung der Prüfung *pro facultate docendi* die zweite zum Gesetz

---

84 A. WOLTER (1989), S. 17.

85 K.-E. JEISMANN (1974), S. 118.

86 Ebd., S. 310. ◊ Zur Rolle Humboldts im Zusammenhang mit der Abiturreform 1812 vgl. auch A. WOLTER (1989), S. 18ff.

erhobene Maßnahme der Bildungsreform des frühen 19. Jahrhunderts. In ihr zeigte sich eine deutliche Verbindung der Ausdehnung staatlicher Befugnisse im Bildungswesen mit dem Vordringen einer neuhumanistischen Lehrplankonzeption.[87] Mit diesen beiden Maßnahmen wurde sowohl die Lehrer- als auch die Schülerausbildung auf ein gleichmäßiges, staatlich kontrolliertes Niveau angehoben und damit eine Neugestaltung des Schulwesens angestoßen.

Johann Wilhelm Süvern, Leiter der Unterrichtsabteilung in der Sektion für Kultus und Unterricht im preußischen Ministerium, gestaltete das Edikt maßgeblich mit. Hauptziel der Reform war es, zu zeigen, „ob der Prüfling seiner ganzen Persönlichkeit nach die Gewähr für sein Fortkommen auf der Universität und später in seinem Beruf bot.“[88] Die Prüfungen wurden nun in gemeinsamer Verantwortung von Schule und Hochschule mit „gemischten Prüfungskommissionen“ abgehalten. Als Abschlusszertifikat gab es drei „Tüchtigkeitsgrade“: die unbedingte und bedingte Tüchtigkeit, die die direkte Zulassung zur Hochschule erlaubten und die Untüchtigkeit, mit der man zwar weiterhin auch an der Universität aufgenommen werden konnte, jedoch nur nach einer weiteren Aufnahmeprüfung an der Hochschule.[89] Damit war die Aufnahme auf der Universität faktisch nicht an das Bestehen, sondern nur an das Ablegen der Reifeprüfung gebunden.

Doch auch das zweite Abituredikt schaffte es noch nicht, einen einheitlichen wisschenschaftlichen Bildungsstand der Hochschulzugänger zu erreichen.[90] Weiterhin blieb es bei der Wirkung, dass der Genuss öffentlicher Stipendien an das Bestehen der Abiturprüfung geknüpft war. Doch die Prüfung wurde in ihrer mittelbaren Bedeutung erheblich gestärkt, zumal die reinen Hochschulaufnahmeprüfungen abgeschafft wurden.[91]

Die Konsequenz aus diesen Entwicklungen war eine noch stärke Vereinheitlichung der Lehrpläne. Lehrplan und Prüfung wurden zu „Mitteln der Synchronisation des Bildungsprozesses von Staats wegen“[92] – ein wichtiger Schritt zur Ordnung eines gleichgerichteten, einheitlichen Unterrichtswesens in Preußen.

Auch jetzt gab es keine Präzisierung von inhaltlichen Anforderungen. Die Prüfungsfächer waren begrenzt auf das, was als das „Wesentliche“ für die „allgemeine Menschenbildung“ angesehen wurde[93]: in den Sprachen: Latein, Grie-

---

[87] Vgl. K.-E. JEISMANN (1974), S. 351.
[88] H.-R. LAURIEN (1998), S. 35.
[89] Vgl. ebd., S. 36.
[90] Vgl. L. WIESE (1902), S. 691.
[91] Vgl. K.-E. JEISMANN (1974), S. 351.
[92] Ebd., S. 358.
[93] Vgl. ebd., S. 354.

chisch (als zentrales Fach), Deutsch und Französisch; in den Wissenschaften: Mathematik, Geschichte, Geographie und (als Natur-Wissenschaften) Physik und Naturbeschreibung. Als schriftliche Prüfungsarbeiten wurden ein deutscher, ein lateinischer, ein französischer und ein mathematischer Aufsatz gefordert sowie eine Übersetzung aus dem Griechischen und eine Übersetzung ins Griechische.[94]

Wenngleich die Umsetzung des zweiten Abituredikts nicht sofort erfolgte (teilweise dauerte es bis spät in die 1820er Jahre, bevor die Reformideen an den Schulen ankamen)[95], war es dennoch nachhaltiger als die erste Reform.[96]

Zahlreiche Nachbesserungen und ergänzende Vorschriften führten schließlich zu einer neuen Prüfungsordnung (dritte Abiturreform), die im Oktober 1834 in Kraft trat und im Wesentlichen bis 1882 das Prüfungswesen an den preußischen Gymnasien bestimmte. Federführend für die Entwicklung der neuen Ordnung war der Gymnasialreferent Johannes Schulze, den WOLTER sogar wegen seiner für die preußische Gymnasialpolitik der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts so bedeutenden Rolle als den eigentlichen Begründer des preußischen Gymnasiums tituliert.[97]

Mit ihr wurde das Abitur an allen Gymnasien verbindlich gemacht; gleichzeitig erkannten alle Bundesländer die Reifezeugnisse gegenseitig an.[98] Sie erhob auch die Forderung, die Klassenstufen und ihre Inhalte genauer festzulegen.[99] Nun war der Besuch der Universitäten ausschließlich von einer auf einem Gymnasium abgelegten Reifeprüfung abhängig, damit entfielen die Aufnahmeprüfungen der Hochschulen vollständig. „Mit diesem Reglement sollte der Anspruch einer hochgespannten Verstandeskultur in der Tradition des abendländischen Humanismus in feste Formen gegossen werden."[100] Mit dieser Formulierung ist auch die soziale und politische Steuerungsfunktion des Abiturs angeschnitten, die neben der Vorbildungsfunktion der Prüfungen (als Grundlage für das Hochschulstudium) nicht zu gering eingeschätzt werden darf.[101]

Inhaltlich maß die neue Prüfungsordnung den Wissenschaften (unter Hegelschem Einfluss) mehr Bedeutung bei, während Latein und Religion ihre zent-

94 L. WIESE (1902), S. 690.
95 Vgl. (speziell für Westfalen) K.-E. JEISMANN (1974), S. 384.
96 Vgl. ebd., S. 357.
97 A. WOLTER (1989), S. 22.
98 H.-R. LAURIEN (1974), S. 403.
99 G. SCHUBRING (1983), S. 181.
100 P. MAST (1989), S. 138
101 Vgl. A. WOLTER (1989), S. 27.

rale Stellung behielten. Damit vermehrte sich die Anzahl der Prüfungsfächer: Als Grundform für das 19. Jahrhundert war das Abiturexamen nun mit sechs bis sieben schriftlichen und zehn bis elf mündlichen Prüfungsfächern festgelegt.[102] Die Prüfungen wurden nun ausschließlich durch Kommissionen abgehalten, die an den einzelnen Schulen gebildet wurden. Nun wurden nur noch die Grade „reif“ und „nicht reif“ vergeben; der „Nichtreife“ wurde vom Studium ausgeschlossen.
Die Schulreform der 1850er Jahre mit dem neuen Lehrplan von 1856 brachte für die Organisation der Abiturprüfungen keine wesentlichen Neuerungen. Mit der stärkeren Gleichberechtigung von Sprachen und Wissenschaften[103] ging eine teilweise Reduzierung der Prüfungsfächer einher. Außerdem wurde die Vorbeurteilung aus der Schulzeit stärker in die Prüfungsbewertung einbezogen als zuvor.
Wesentlicher war jedoch das Bemühen der neugegründeten Realgymnasien um mehr gesellschaftliche Anerkennung durch Gleichstellung mit den Gymnasien, die vor allem durch die Gewährung der Hochschulreife zu erreichen war.[104] So wurde seit 1859 auch auf dem Realgymnasium das Abitur als (eingeschränkte) Hochschulreife abgehalten, basierend auf den Lehrplänen von Ludwig Wiese (1856).
Mit der Neuordnung von 1892 (Johannes Stauder) gab es nur noch fünf verpflichtende schriftliche Prüfungsfächer und fünf mündliche. Außerdem konnte man sich bei ausreichender Begründung von einzelnen Prüfungsfächern befreien (dispensieren) lassen. Eine nicht ausreichende Leistung in einem Prüfungsfach konnte durch eine gute Note in einem anderen Fach ausgeglichen werden.

2.3.3 Gleichstellung humanistischer und realer Bildung

Die Auseinandersetzungen um das Verhältnis zwischen humanistischer, „klassischer“ Bildung und den Realfächern bestimmte die Formung des deutschen Schulwesens im 19. Jahrhundert wesentlich. Diese scheinbare Unvereinbarkeit beider Richtungen war es schließlich, die zur Gründung der Realanstalten führte, die sich durch die Betonung der naturwissenschaftlichen Fächer gegenüber dem „klassischen“ Gymnasium absetzten. Die Realanstalten hatten allerdings lange Zeit gegen ihre minderwertige Stellung zu kämpfen.

[102] H.-R. LAURIEN (1998), S. 36.
[103] H.-R. LAURIEN (1974), S. 403.
[104] G. SCHUBRING (1978), S. 111.

Ein erster Schritt zur Gleichberechtigung war die Einführung des Abiturs auf den Realanstalten im Jahr 1859 (siehe oben).

Die vollständige Gleichberechtigung aller höheren (Jungen-)Schulanstalten (Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen) war aber erst mit der neuen „Ordnung der Reifeprüfung an den neunstufigen höheren Lehranstalten“ vom 28. Oktober 1901 erreicht. Der Unterschied zwischen den Reifeprüfungsabschlüssen an den verschiedenen Schulstufen bestand nun nur noch in der unterschiedlichen Gewichtung (und Auswahl) der Fächer, aber nicht mehr darin, dass die unterschiedlichen Reifezeugnisse verschiedene Arten der Hochschulausbildung zuließen. Damit war das Abiturmonopol des Gymnasiums gebrochen. Am Gymnasium wurde der Anteil des Griechischen zurückgenommen, dagegen erhielt das Lateinische mehr Bedeutung. Als neue Prüfungsfächer wurden bspw. Englisch und Physik im Realgymnasium oder Chemie in der Oberrealschule für die schriftlichen Arbeiten zugelassen.[105] Außerdem konnten bei der Fächerwahl nun Interessenschwerpunkte der Schüler einbezogen werden.[106]

Bei der Zulassung zur Abiturprüfung konnte das Prädikat „zweifellos reif“ gegebenenfalls von der mündlichen Prüfung befreien, was für den „nicht zweifellos Reifen“ nicht galt; bei fehlender sittlicher oder wissenschaftlicher Reife konnte die Zulassung auch untersagt werden.[107] Das Stattfinden der Prüfung vor dem gesamten Lehrerkollegium an einem Tag diente zum einen der Kontrolle des gerechten Prüfungsablaufs, zum anderen der Selbstdarstellung der Schule.

2.3.4 Differenzierung des Abiturs zwischen Kleinscher Reform und Nationalsozialismus

Mit dem Brechen des gymnasialen Abiturmonopols entwickelte sich bald ein sehr differenziertes Schulwesen mit sehr verschiedenen abiturberechtigten, höheren Lehranstalten. Allmählich gewann auch das höhere Mädchenschulwesen Anschluss, so dass es in den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts auch das (zunächst nur eingeschränkte) Abitur für Mädchen gab. Nicht zuletzt hatte auch die Einführung der obligatorischen vierjährigen Grundschule im Jahre 1920 Einfluss auf die höhere Schulbildung, konnte die höhere Schule doch nun auf ein einheitliches Bildungsfundament aufbauen. Damit war indi-

---

[105] W. HARDER (1983), S. 16.
[106] H.-R. LAURIEN (1998), S. 36.
[107] H.-R. LAURIEN (1974), S. 403.

rekt die Grundlage für eine breitere fachlich-inhaltliche Ausdifferenzierung des höheren Schulwesens geschaffen, die sich bspw. auch in den Neuerungen der Meraner Reform wiedererkennen lässt (vgl. → *Kapitel 2.2.5*).
Hier zeigen sich zwei Ausprägungen der Differenzierung des höheren Schulwesens: zum einen eine externe Differenzierung (Vielschichtigkeit der Schulformen), zum anderen eine interne Differenzierung (Ausweitung des Schulstoffes). Besonders letzterer Punkt steht in Zusammenhang mit der pädagogischen Forderung nach mehr Individualisierung des Schülers. So formulierten die preußischen Schulreformen des Jahres 1925 die Aufgabe des Abiturs neu, die nun nicht mehr nur in der Vorbereitung auf das Hochschulstudium bestand, sondern das Gymnasium vielmehr verpflichtete, „zum Verständnis der Gegenwartskultur zu führen, weshalb in der Reifeprüfung mehr Gewicht auf die Feststellung der geistigen Leistungsfähigkeit als auf die Überprüfung des Stoffwissens gelegt wurde“[108]. Es gab sogar Experimente mit flexibleren Formen der Oberstufenorganisation durch die Einrichtung eines Kurssystems.[109]
Durch diese Differenzierung und Individualisierung

> „war der neuhumanistische Begriff der Hochschulreife endgültig aufgegeben zugunsten eines vielgestaltigen Systems möglicher Prüfungsfächerkombinationen auf der Basis eher äußerlicher Zuordnungen von Schulfächern zu Hochschuldisziplinen.“[110]

Die Schattenseite dieser Differenzierung zeigte sich in einer Unübersichtlichkeit der Schul- und somit auch Prüfungsformen, die zu Lasten der Organisierbarkeit ging. So wuchs zwischen 1918 und 1933 die „Unzufriedenheit mit der erdrückenden Expansion eines formalistischen Berechtigungswesens und dessen Rückwirkungen auf die Lernmotivation und das Lernverhalten der Oberstufenschüler“.[111] Mit dieser Unzufriedenheit gingen Äußerungen einiger Kritiker einher, die die Abschaffung des Abiturs, oder zumindest die Entkopplung von Schulabschluss und Hochschulzugangsberechtigung forderten. Die „Schulreife ohne Prüfung“ kann als Weiterführung des oben zitierten Gedankens der „Feststellung der geistigen Leistungsfähigkeit“ gesehen werden, denn eine stoffungebundene Überprüfung einer allgemeinen geistigen Leistungsfähigkeit ist im strengen Sinne von einer Prüfung in Form des Abiturs nicht möglich, das nur die Feststellung einer punktuellen Leistung erreichen kann.

108 H.-R. LAURIEN (1998), S. 36.
109 Vgl. A. WOLTER (1989), S. 66.
110 W. HARDER (1983), S. 17.
111 A. WOLTER (1989), S. 66.

Die politische Situation Deutschlands bereitete diesen Diskussionen jedoch zunächst ein vorzeitiges Ende: Die nationalsozialistische Neuordnung des höheren Schulwesens stoppte 1937/38 jede Art von Differenzierung und Individualisierung im Schulwesen. Die „Absicht einer generellen Bildungsbegrenzung“ sowie die „ideologische Vereinheitlichung und Kontrolle im Interesse der nationalsozialistischen Weltanschauung“ können als die zwei Hauptgründe dieser Wende genannt werden.[112]

Während das Mädchenschulwesen komplett zurückgeschraubt wurde (es gab nur noch die Oberschule mit einem hauswirtschaftlichen und einem sprachlichen Zweig in der Oberstufe und mit eingeschränktem Frauenabitur), erfuhr auch die Jungenschule erhebliche Einschränkungen: Die Oberschule (mit dem Lehrplan des früheren Realgymnasiums) bildete die Hauptform; in der Oberstufe gab es einen sprachlichen und einen mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig. Das humanistische Gymnasien und die Aufbauschulen bildeten zwei Sonderformen.

Weitere NS-ideologiegeprägte Änderungen drängten alle Errungenschaften der letzten Jahrzehnte zurück,

> „so der bereits 1933 statuierte Ausschluß aller ‚Nichtarier‘ – trotz bestandener Reifeprüfung – vom Studium, die Begrenzung des Anteils weiblicher Abiturienten auf höchstens 10 %, die Zuerkennung der Hochschulreife ohne eine Prüfung – über den sogenannten Reifevermerk – für Primaner, die vorzeitig zum Wehrdienst einberufen werden sollten, und die Auslese von Studienberechtigten über Parteischulen und Parteigliederungen.“[113]

Mit dem weiteren Fortschreiten des Krieges war ein geregeltes Abiturprüfungswesen an vielen Schulen nicht mehr durchführbar. Oft gab es nach dem Krieg die Möglichkeit, dass Kriegsjahrgänge nachträglich die Abiturprüfung ablegen konnten.

2.3.5 Entwicklungen nach 1945 und Abitur der differenzierten Oberstufe

Nach Kriegsende knüpfte die Organisation der Abiturprüfungen an die Situation vor dem Krieg an. Die Form des dreigliedrigen Gymnasiums wurde durch das Düsseldorfer Abkommen von 1955 bestätigt: es gab das altsprachliche, das neusprachliche und und das mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium. Mit der Aufnahme ins Grundgesetz (Art. 20, Abs. 3 und Art. 19, Abs. 4) wurde das Abitur 1949 nun als Verwaltungsakt rechtlich prüfbar. Das führte dazu, dass seit 1969 die Prüfungsakten dem Prüfling zugänglich sind, so dass das gesamte Prüfungsfahren letztendlich mehr Transparenz bekommt.

[112] A. WOLTER (1989), S. 35.
[113] W. HARDER (1983), S. 17.

Anknüpfend an die 1920er Jahre spaltete sich das Schulsystem auch jetzt wieder in viele verschiedene Sparten auf. So ließ das Hamburger Abkommen von 1964 neben den drei gymnasialen Hauptformen weitere Spezialzweige zu, die sich bereits seit den 1950er Jahren herausbildeten. Damit bestand erneut die Gefahr einer zu unübersichtlichen Schulstruktur und damit einhergehend eine stoffliche Überbeanspruchung des Unterrichts, was zu Überlegungen zu einer einheitlichen Regelung und Konzentration des Schulwesens führte.

Die als „Tutzinger Gespräche" bekannten Beratungen zwischen Beauftragten der Kultusministerkonferenz und der Westdeutschen Rektorenkonferenz über den „gemeinsamen Kern der Hochschulreife für unterschiedliche Zugangswege" führten zum sog. Tutzinger Maturitätskatalog (1958), der versuchte, die Hochschulreife inhaltlich neu zu bestimmen.[114] Dieser Katalog sollte ein „inhaltliches Minimum" darlegen, jedoch nicht als Stoffplan, sondern im Sinne „geistiger Grunderfahrungen", von W. Flitner bezeichnet als „zyklische Grundbildung".[115] Damit sollten die beiden gegensätzlichen Extreme einer zu engen Spezial- und einer enzyklopädischen Halbbildung vermieden werden und die „humanistische' (formale und Allgemeinbildung) mit der ‚pragmatischen' Komponente (fachliche Anforderung für das Studium)"[116] verbunden werden.

Diese Gedanken führten zu der sog. Saarbrücker Rahmenvereinbarung von 1960 (KMK-Beschluss vom 29. September 1960), die eine Reduzierung des Fächerkanons vorsah. Neben der Konzentration des Lehrplans stand dagegen die Ausdehnung der individuellen Wahlmöglichkeiten. Die schriftliche Abiturprüfung umfasste nun Deutsch und Mathematik sowie zwei weitere Fächer je nach Schultyp; dazu kamen bis zu drei mündliche Prüfungsfächer.[117] Außerdem entwickelte sich das Abitur immer mehr von einer punktuellen Prüfung zu einer kontinuierlichen Bewährung, indem Leistungen der früheren Schuljahre auf die Abschlussbewertung starken Einfluss nehmen.

Das oben bereits erwähnte Hamburger Abkommen der Ministerpräsidenten (1964) führte zu einer Umgestaltung des Schulsystems (u. a. Einführung der Hauptschule als Ablösung der alten Volksschule), führte aber auch die fachgebundene Hochschulreife ein, die – ohne zweite Fremdsprache und mit neuen Schwerpunktfächern – z. B. auf dem Frauengymnasium oder dem Wirt-

[114] Angaben dieses Absatzes nach H.-R. LAURIEN (1974), S. 404.
[115] Wilhelm Flitner (1959): *Hochschulreife und Gymnasium*. Heidelberg. Zit. nach H.-R. LAURIEN (1974), S. 404.
[116] H.-R. LAURIEN (1974), S. 404.
[117] Ebd., S. 404.

schaftsgymnasium erlangt werden konnte. Ende der 1960er Jahre und 1970 wurden diese Einschränkungen aber teilweise wieder zurückgenommen.
Doch alle Entwicklungen der Nachkriegsjahre konnten schließlich kein befriedigendes Ergebnis liefern und führten auf direktem Wege zur Oberstufenreform von 1972 (seit 1976 für das Abitur verbindlich), die *die* zentrale Zäsur der bisherigen Abiturgeschichte darstellt. Sie führte zu einer grundsätzlichen Neugestaltung des über fast 200 Jahre gewachsenen Systems der auf die Hochschule hinweisenden Schulabschluss-Klassen mit dem Abitur als Verbindungspunkt zwischen Schule und Studium. Dabei griff sie zwei Hauptprobleme der Vergangenheit auf: 1. die Vereinheitlichung des immer ausdifferenzierteren, verschiedensten Ansprüchen genügenden höheren Schulwesens und 2. die Verringerung der „Diskrepanzen zwischen dem Lehr- und Lernsystem der Universität und dem des Gymnasiums“[118].
Das eigentlich Neue der Oberstufenreform war die Herangehensweise an die Problematik: Der inhaltliche Kern des Unterrichts wurde nun auf das für unumgänglich gehaltene Minimum reduziert, so dass darauf ein differenziertes System unter äußerlich gleichartigen Rahmenbedingungen aufgebaut werden konnte; das bedeutete die Umwandlung einer externen in eine interne Differenzierung. Dieses Konzept sollte das mehr formal-methodisch definierte, wissenschaftsorientierte Lernen fördern, um damit schließlich das enzyklopädische Prinzip zu überwinden.
Auf dieser Grundlage entstand das bis heute im Wesentlichen erhaltene Kurssystem mit (für NRW) zwei Leistungs- und zwei Grundkursen im Abitur. In einem Grundkurs wird eine mündliche Prüfung abgehalten, die übrigen drei Fächer werden mit schriftlichen Arbeiten geprüft. Die Wahlfreiheit der Fächer wurde im Laufe der Jahre zugunsten des gemeinsamen Kanons wieder etwas zurückgenommen. Im Abitur müssen alle Aufgabenfelder (I: sprachlich-literarisch-künstlerisches, II. gesellschaftswissenschaftliches, III. mathematisch-naturwissenschaftlich-technisches Aufgabenfeld) abgedeckt sein, es gibt (mittlerweile wieder) bestimmte Pflichtfächer (darunter auch Mathematik), andere Bereiche können durch Wahlfächer abgedeckt werden. Die sechsgliedrige Benotungsskala wird durch ein 15-Punkte-System abgelöst.
Die Verantwortlichkeit der Bildungspolitik liegt bei den Bundesländern, ist aber mit dem Maastrichter Vertrag (1991/93) in ein internationales Konzept eingebettet. Damit verbunden sind Bestrebungen, Bildung zu internationalisieren

[118] A. WOLTER (1989), S. 36.

und vergleichbar zu machen. In diesem Zusammenhang ist auch das Zentralabitur zu sehen, das in einigen Bundesländern (z. B. Bayern, Baden-Württemberg) bereits durchgeführt wird, in Nordrhein-Westfalen erstmals 2007 abgehalten werden soll. (→ *Kapitel 5.2.*) Zusammen mit der Verkürzung der Schulzeit auf zwölf Schuljahre zeigen auch die aktuellen Veränderungen, dass das Abitur sich im steten Wandel befindet, der immer im Bezug zu gesamtgesellschaftlichen Veränderungen und Ansprüchen gesehen werden muss.

3. Mathematik im schriftlichen Abitur

Nachdem im letzten Kapitel die Entwicklungen von Mathematikunterricht und Abitur getrennt betrachtet wurden, sollen diese nun hier zusammengeführt werden. Dazu bietet die Auseinandersetzung mit den in den Lehrplänen formulierten Abituranforderungen einen geeigneten Ansatz. Denn an ihnen musste sich die Gestaltung der Abituraufgaben ausrichten. Auch ein kurzer Blick in einige Aufgabensammlungen scheint mir sinnvoll, da sie konkrete Beispiele für die Gestaltung von Abituraufgaben geben können.

3.1. Abituranforderungen der Lehrpläne im Fach Mathematik

Der Begriff „Lehrplan“ ist in diesem Zusammenhang als Oberbegriff zu sehen für alle Arten von Dokumenten, die als Weisung an Lehrende kodifizierte Aussagen zu Anforderungen an die schriftlichen Abiturprüfungen enthalten.[119] So sollen hier auch die als „Maturitätsordnung“, „Prüfungsordnung“, „Richtlinien“ oder ähnlich bezeichneten Bestimmungen nicht ausgeschlossen bleiben. Umso schwerer fällt es, eine geeignete Auswahl von Lehrplänen zu treffen, da besonders in früherer Zeit (bis ins 19. Jahrhundert) eine Unmenge an sog. Lehrplänen existierte, die auf der Grundlage der allgemeinen Gesetzesbestimmungen in kleineren Bildungseinheiten bzw. an den Schulen selbst (als Schul- oder Lektionspläne) entwickelt worden waren.

Im Rahmen dieser Arbeit sind Form und Funktion der Lehrpläne nur von zweitrangigem Interesse, vielmehr geht es hier um die Informationen, die sie uns bezüglich der Mathematik im Abitur und ihrer didaktischen Vermittlung geben. Daher sei hier nur ein kurzer Einblick in lehrplantechnische Fragestellungen gegeben, um Verbindlichkeit und Einfluss auf den Alltag der Unterrichts- (und Abituraufgaben-)Gestaltung einschätzen zu können.[120]

HOPMANN bezeichnet das Jahr 1809 als Geburtsstunde der preußischen Lehrplanverwaltung, in dem die Direktoren der Berliner Gymnasien dazu angehalten worden waren, ihre Lektionspläne für das kommende Halbjahr vorab zur Genehmigung der Sektion des Kultus und des öffentlichen Unterrichts im preußischen Innenministerium vorzulegen.[121] Damit war erstmals eine durch die öffentliche Verwaltung kontrollierte, inhaltliche Festlegung des Unterrichts gewährleistet.

---

119 Definition in Anlehnung an S. HOPMANN (1983), S. 23.

120 Fragen der Lehrplangestaltung werden ausführlich bei A. DÖRPINGHAUS et al. (2004), und S. HOPMANN (1988), diskutiert.

121 S. HOPMANN (1988), S. 45.

Mit der auf Johann Schulze zurückgehenden Lehrordnung von 1837 (dem sog. Blauen Buch) gab es erstmals eine feste, einheitliche Vorgabe, an der die Lektionspläne der Schulen ausgerichtet werden mussten. Die Direktoren der Schulen wurden verpflichtet, „[…] rücksichtslos darauf zu halten, daß jeder Lehrer die für seine Klasse und sein Fach vorgeschriebenen Lehr-Pensen genau beachte".[122]
Eine strenge Verbindlichkeit gab es aber noch nicht, und daher hielten sich viele Schulen auch nicht an eine strenge Umsetzung der Vorgaben, zumal sie es teilweise aufgrund schulischer und personeller Gegebenheiten gar nicht konnten. Wenn SCHUBRING schreibt, bis 1882 habe es in Preußen keine verbindlichen Lehrpläne gegeben,[123] so schließt sich die Frage an: wie lässt sich Verbindlichkeit von Lehrplänen festlegen und wie groß ist der Gestaltungsfreiraum, den sie Schulen und Lehrern gewähren? Oftmals ergaben sich Lehrpläne als sekundäre Bestandsaufnahme, die den wissenschaftlichen Prüfungskommissionen als Information darüber zugeschickt wurde, was in der Schule durchschnittlich in einzelnen Klassen gelehrt wurde.[124] So waren die Abiturreglemente jene Dokumente, die als erste klare Auskünfte über konkrete Stoffinhalte gaben, bevor in zweiter Instanz die Lehrpläne nachzogen, um den Stoff auf dem Weg hin zum Abitur festzulegen. Dabei sind zwei wesentliche Funktionen der Lehrpläne zu benennen: die Festlegung des „Was" (der Stoff) und Leitlinien zum „Wie" (die Didaktik).[125] Die unterschiedliche Gewichtung beider Funktionen hat direkte Auswirkungen auf den Umgang des Lehrers mit den im Lehrplan aufgestellten Anforderungen.

Nach wie vor bleibt die Frage der Auswahl, welche Lehrpläne in diese Arbeit einbezogen werden sollen. Dabei erscheint mir eine Orientierung an den Eckdaten der Abitur- und Mathematikgeschichte, wie sie aus dem vorigen Kapitel hervorgeht, als sinnvoll. In diesem Sinne findet sich bei LIETZMANN bis 1925 eine Zusammenstellung, an die ich mich im Wesentlichen halten möchte.[126] Der Übersicht halber sei diese hier (reduziert auf die abiturrelevanten Angaben) zusammengefasst:

---

122 Zit. nach: L. v. RÖNNE (1855), S. 146.
123 G. SCHUBRING (1983), S. 180. Der Lehrplan von 1810/16 wurde nie offiziell empfohlen, auch die nachfolgenden Pläne konnten aufgrund einer recht liberalen Schulpolitik keinen nachhaltigen Einfluss auf die schulinternen Lektionspläne nehmen (vgl. auch ebd., S. 57).
124 Vgl. ebd., S. 180.
125 Vgl. A. DÖRPINGHAUS et al. (2004), S. 567 und 599.
126 W. LIETZMANN (^{2}1926), S. 215.

- 1788: Erstes Abiturreglement für Gymnasien;
- 1810-16: Zweites Abiturreglement und Süvernscher Lehrplan als „Muster für die Grundlinien der Lehrverfassung“;
- 1837: Die erste an preußischen Schulen verbindliche Lehrordnung für Gymnasien (J. Schulze);
- 1856: Neuer Lehrplan für Gymnasien (L. Wiese);
- 1859: Einführung des Abiturientenexamens an den Realgymnasien (nach den Plänen von L. Wiese);
- 1882: Neue Lehrpläne für Gymnasium, Realgymnasium und Oberrealschule (H. Bonitz);
- 1892: Neue Lehrpläne für alle drei Schulgattungen (J. Stauder);
- 1901/02: Neue Lehrpläne nach Gleichberechtigung aller drei Schulformen;
- 1925: „Revidierte Meraner Lehrpläne“.

Für die Auswahl der Lehrpläne nach 1926 habe ich andere Quellen herangezogen, u. a. die Dokumentationen von SCHUBRING[127].

- 1937/38: Lehrpläne über „Erziehung und Unterricht in der Höheren Schule“ des Nationalsozialismus
- 1945: Übergangslehrpläne
- 1952: „Richtlinien für den Unterricht in Mathematik und Physik an den Gymnasien im Lande NRW“
- 1963: „Richtlinien für den Mathematikunterricht in der höheren Schule. Mathematik“
- 1972: „Curriculum Gymnasiale Oberstufe. Mathematik“
- 1981: „Richtlinien für die gymnasiale Oberstufe in Nordrhein-Westfalen. Mathematik“
- 1999: „Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II – Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik“

Anhand der in den aufgeführten Dokumenten gemachten Angaben soll nun ein Überblick über die Anforderungen beim schriftlichen Abitur im Fach Mathematik im Wandel der Zeiten gegeben werden.

3.1.1 Das Abiturreglement 1788

Durch das Abiturreglement von 1788 wurden keine Unterrichts- und Prüfungsinhalte streng festgelegt. Vielmehr spiegelte sich hierin der Gedanke wider, dass die Gestaltung des Unterrichts nicht mehr die Sache jeder Schule selbst

---

[127] G. SCHUBRING (1977) und (1986).

sein könne, sondern ein geplantes Unterrichtswesen des Staates entwickelt werden müsse. Der Rektor der Halberstädter Domschule Fischer formulierte dazu: ein „‚Allgemeiner Studienplan‘ für Schule und Universität“ sei wünschenswert,

> „zwar nicht so eisern, daß er dem selbstdenkenden Lehrer die Hälfte seiner Arbeit unbrauchbar macht oder künftigen Verbesserungen den Weg verschlösse; aber doch in allen Theylen so bestimmt, daß das Schul- und Erziehungswesen des ganzen Landes dadurch wirklich zu einem in allen seynen Theylen zusammenhängenden Ganzen würde.“[128]

Johann Gottlieb Schummel, der als Gutachter an der Entwicklung des Abiturreglements beteiligt war, entwarf erstmals einen Maturitätskatalog, der u. a. „Neue Geographie und Statistik, besonders Kenntnis des Vaterlandes“ und „Reine Mathematik“ als Prüfungsstoff forderte.[129] Inwieweit in dem ersten Punkt geometrische Aspekte inbegriffen waren, ist nicht zu erkennen; auch zur „reinen Mathematik“ werden keine konkreteren Inhalte genannt.

Trotz mehrerer Vorschläge und Entwürfe zur inhaltlichen Festlegung des Abiturexamens und damit auch des vorhergehenden Unterrichts, konnten die Forderungen nach einer inhaltlichen Reifedefinition bis zur Einführung des Reglements am 23. Dezember 1788 nicht erfüllt werden. Es blieb vorerst bei der Ankündigung, „künftig ein genaueres Reglement zu entwerfen, worin der ganze Gang dieser Prüfung bestimmt vorgeschrieben“ werden solle.[130] Dazu kam es aber so bald nicht und die

> „preußischen Schulen und Universitäten […] standen seit 1788 bei der Umsetzung des ersten Abiturreglements vor dem Problem, ihre Schüler bzw. Studenten einem Examen unterziehen zu müssen, ohne konkrete Vorgaben für das Maß einer zu fordernden Reife zu besitzen“.[131]

Auch über den Umfang der schriftlichen Arbeiten wurden im Reglement keine genauen Forderungen erhoben. So heißt es nur, „daß weder zu schwere noch zu viele und weitläufige Aufgaben bestimmt werden müssen“ und „die *Examinandi* zu deren Bearbeitung nicht länger als einen Vor- oder Nachmittag brauchen“[132]. Auf dem Zeugnis erschienen hinterher die Prüfungsurteile „A. In Sprachen [… und] B. In wissenschaftlichen Kenntnissen, vornehmlich historischen.“[133] Dass überhaupt die Mathematik oder das Rechnen verbindlich für die Abiturprüfung gemacht worden wäre, geht aus diesen Bestimmungen also

---

[128] Zit. nach K.-E. JEISMANN (1974), S. 106.
[129] Vgl. N. KAMP (1988), S. 102.
[130] Vgl. dazu ebd., S. 101ff. Zitat nach ebd. S. 104.
[131] N. KAMP (1988), S. 108.
[132] Zit. nach ebd., S. 267 (Faksimile-Abdruck).
[133] Zit. nach ebd., S. 268 (Faksimile-Abdruck).

nicht hervor. Daher gehörte die Arbeit in Mathematik auch „nicht allgemein“ zum Fächerkanon der Abiturprüfungen.[134]

Das zeigt sich auch noch 15 Jahre später in einem Fragenkatalog des kurmärkischen Konsistorialrats Spalding (1803), den der preußische König Friedrich Wilhelm dem Oberschulkollegium als Grundlage für die Reifeprüfung nahelegte. Darin lautet eine der (mündlich zu beantwortenden) Fragen lediglich:

> „2. Was ist bekannt von dem Einflusse, den Neutons Lehrsätze von der Schwere in die physikalischen Wissenschaften, besonders in die Astronomie gehabt haben?“[135]

Hier ist weniger eine rechnerische als eine allgemein-philosophische Antwort gefragt, zumal es nicht um eine rein mathematische Fragestellung geht, sondern um die Anwendung in Physik und Astronomie.

Wo die reine Mathematik Inhalt von Abituraufgaben war, zeigte sie nur wenig Anspruch. So ist von 1792 eine Abituraufgabe aus Königsberg in der Neumark überliefert, die fragte: „Wieviel betragen sämtliche Winkel eines Triangels?“[136]

Diesen spärlichen Angaben zufolge, war die Mathematik in den vom ersten Abiturreglement geforderten Examensarbeiten nur in sehr begrenztem Maße vertreten. Vielmehr diente sie als Basis für physikalische, astronomische und geographische Betrachtungen.

3.1.2 Süvernscher Lehrplan und Unterrichtsverfassung

Innerhalb der Reform des zweiten Jahrzehnts des 19. Jahrhunderts sind zwei Dokumente zu unterscheiden: zum einen das Abiturreglement von 1812, zum anderen der Lehrplan („Unterrichts-Verfassung der Gymnasien und Stadtschulen“) von 1816, der auf einer Vorlage von 1810 basierte. Beide Bestimmungen entstanden parallel, weisen aber dennoch einige Differenzen auf. So sah das Abiturreglement von 1812 in Mathematik nur den Unter- und Mittelstufenstoff für die Prüfung vor, während der Oberstufenstoff (allgemeine Gleichungstheorie, Analysis und Wahrscheinlichkeitslehre) sowie die analytische Geometrie (noch Stoff der Mittelstufe) ausgeschlossen waren.[137] Diese Differenzen

> „lassen sich in ihrer konkreten Ursache nicht mehr ausklären […]. Da aber das Abituredikt ursprünglich noch 1810 publiziert werden sollte, ist die Änderung wohl durch in der Zwischenzeit offenbar geführte kontroverse Debatten und durch die veränderte Schulpolitik unter Schuckmann zu erklären. Man kann annehmen, daß

---

134 L. WIESE (1864), S. 483.

135 Zit. nach N. KAMP (1988), S. 106.

136 Bei M. SIMON (²1908), S. 18.

137 G. SCHUBRING (1983), S. 56. ◊ Zu den einzelnen Bestimmungen für die Klassenstufen siehe § 11 der Süvernschen Unterrichts-Verfassung, abgedruckt bei: L. SCHWEIM (1966), S. 75ff.

> bei der Änderung der Hinweis auf die zu der Zeit noch gar nicht mögliche Realisierung der Forderungen eine Reduzierung nahelegte und erst die Zukunft eine Erhöhung in Aussicht stellte."[138]

Als Gesetztestext übte das Abituredikt jedoch stärker normierende Kraft aus als der Lehrplan. Die im Edikt geforderten geometrischen Kenntnisse umfassten die „ebene Geometrie, elementare Stereometrie, Umfangs- und Inhaltsberechnungen nach der Exhaustionsmethode"[139] und orientierten sich damit an Euklids „Elementen":

> „In der Mathematik wird erfordert Kenntniß der Rechnungen des gemeinen Lebens nach ihren auf die Proportionslehre gegründeten Principien, des Algorithmus der Buchstaben, der ersten Lehre von den Potenzen und Wurzeln, der Gleichungen des ersten und zweiten Grades, der Logarithmen, der Elementargeometrie (so weit sie in den sechs ersten und dem 11. und 12. Buches des Euclides vorgetragen wird), der ebenen Trigonometrie und des Gebrauchs mathematischer Tafeln;"[140]

Damit waren die Kegelschnitte nicht inbegriffen. Außerdem wurde der Umgang mit quadratischen Gleichungen und Logarithmen gefordert. Die vorgesehene Form der schriftlichen Arbeit sah im Fach Mathematik einen Aufsatz vor,

> „wo gleichfalls besonders die Beutheilungskraft des Examinanden in der Anwendung des Erlernten zu erforschen ist, und aus welchem hervorgehen soll, ob er selbst Fragen aufzufinden und Ansichten zu nehmen im Stande sey, und wie weit sich sein Combinationsvermögen erstrecke."[141]

Die nach diesen Bestimmungen anfangs gestellten Abituraufgaben waren durchaus von hohem Niveau und gingen teilweise über die geforderten Inhalte hinaus, wie eine Auswahl von Aufsatzthemen zeigt, die SCHUBRING zusammenstellte:

- „Geometrische Entstehung der Kurven, welche man Kegelschnitte nennt; Vergleichung derselben untereinander in Betrachtung der Haupteigenschaften einer jeden von ihnen und Übergang dieser Kurven ineinander" (Aachen 1819);
- „1. Begriff der arithmetischen Reihe,
  2. Geist der Exhaustionsmethode der Alten vs. Principien der Infinitesimalrechnung der Neueren,
  3. Ursprung und eigentliche Bedeutung der trigonometrischen Linien" (Köln, kath. 1817);
- „Gleichung der Parabel" (Köln, kath. 1818);
- „Worauf kommt es bei der geometrischen Auflösung des delphischen Problems oder der Verdopplung des Würfels an?", Unterpunkte: „Auflösung des Heron und Prüfung derselben", „Auflösung der Parabel" (Joachimsthal-Gymnasium 1817)[142]

Dieser hohe Anspruch stieß bald auf scharfe Kritik wie die des Konsistorialrats August Ferdinand Bernhardi, der 1816 erklärte, er verstehe zwar nicht viel von Mathematik,

---

138 G. SCHUBRING (1983), S. 56f.
139 Ebd., S. 225.
140 Zit. nach J. D. F. NEIGEBAUR (1988), S. 292.
141 Zit. nach ebd., S. 294.
142 Nach G. SCHUBRING (1983), S. 57.

> „allein, das weiß ich, daß die neuliche Verordnung [der Süvern-Plan] nach welcher das Abiturientenexamen in der Mathematik, in ein Examen in mathematischer Erfindungsgabe und die Wahrheiten derselben wie ein deutscher Aufsatz, welchen der Jüngling aus sich selbst schöpfen soll, behandelt wird, übertrieben ist.“[143]

So führten die Diskussionen der folgenden Jahre auch zu einer Maßregelung, und in Teilen Rücknahme der Ansprüche. Für die didaktische Methodik hatte diese Entwicklung positive Auswirkungen, indem sie bspw. durch die Einführung von Lehrbüchern den Unterricht effektivierte (vgl. →*Kapitel 2.2.2*). Ein weiteres Fortschreiten der inhaltlichen Reduktion konnte schließlich durch das neue Abiturreglement von 1834/37 gestoppt werden.

3.1.3 Die Lehrordnung von 1834/37

Das Reglement vom 24. Oktober 1837 (die sog. Maturitätsordnung), das an sämtliche preußischen Provinzial-Schulkollegien versendet wurde, bezieht sich bezüglich der „Prüfung der zur Universität Abgehenden“ unter Abschnitt 7 auf das am 4. Juni 1834 erlassene entsprechende Reglement.

Neben den allgemeinen Bestimmungen sind unter § 28 auch Angaben zu den Prüfungsinhalten einzelner Fächer gemacht. Für das Fach Mathematik heißt es dort:

> „[…] Das Zeugniß der Reife ist zu ertheilen:
> A. wenn der Abiturient […]
> 6) […] in Hinsicht auf die Mathematik, Fertigkeit in den Rechnungen des gemeinen Lebens nach ihren auf die Proportionslehre gegründeten Prinzipien, Sicherheit in der Lehre von den Potenzen und Wurzeln und von den Progressionen, ferner in den Elementen der Algebra und der Geometrie, sowohl der ebenen als körperlichen, Bekanntschaft mit der Lehre von den Kombinationen und mit dem binomischen Lehrsatze, Leichtigkeit in der Behandlung der Gleichungen des ersten und zweiten Grades, und im Gebrauche der Logarithmen eine geübte Auffassung in der ebenen Trigonometrie, und hauptsächlich eine klare Einsicht in den Zusammenhang sämmtlicher Sätze des systematisch geordneten Vortrages hat“[144]

Eine wesentliche Veränderung gegenüber 1812 ist damit nicht zu verzeichnen (allerdings wurden Kegelschnitte und sphärische Trigonometrie ausgeschlossen). Dies wird auch in einem Erlass des Oberschulkollegiums vom 13. September 1834 festgestellt und zum einen mit der allgemeinen Aufgabe des Mathematikunterrichts, „die Urtheilskraft der Schüler zu üben“, andererseits mit der Situation mangelnder ausreichend qualifizierter Lehrkräfte begründet:

> „Diese Forderungen sind im Wesentl. dieselben, welche in dem Ed. v. 12. Okt. 1812 gemacht worden, und obwohl dem Min. nicht unbekannt war, daß in mehreren Gymn. in den K. Staaten der mathemat. Unterricht über diese Forderungen schon seit Jahren hinausgegangen ist, so hat das Min. dennoch Anstand [sic] genommen, in dem neuen Regl. v. 4. Juni d. J. die Anforderungen in Hinsicht der Mathematik zu steigern, theils, weil sich mittelst des Geforderten der Hauptzweck des

143 Zit. nach G. SCHUBRING (1983), S. 58.
144 Zit. nach L. v. RÖNNE (1855), S. 273.

> mathemat. Unterrichts in den Gymn. welcher nicht sowohl auf Mittheilung von mathemat. Sätzen, die etwa in diesem, oder in jenem Lebensverhältnisse unmittelbare Anwendung auf sinnliche Gegenstände finden, als vielmehr darauf zu richten ist, die Urtheilskraft der Schüler zu üben, und sie an Klarheit und Bestimmtheit der Begriffe und an Konsequenz im Denken zu gewöhnen, ganz füglich erreichen läßt, theils weil nach der bisher. Erfahrung die Zahl der Gymn. in den K. Staaten nicht klein ist, welche in Hinsicht der Leistungen ihrer zur Univ. entlassenen Schüler in der Mathem. noch hinter den bisher. Forderungen zurückgeblieben sind.“[145]

Dabei standen anwendungsbezogene Fragestellungen nicht im Mittelpunkt des Schulunterrichts, wie es etwa eine Verbindung mit naturwissenschaftlichen Fächern hätte erreichen können.

> „Bei allen zeitgemäßen Erweiterungen des Lehrstoffs blieb das preußische Gymnasium dem Praktischen, dem Nützlichen, dem Angewandten abhold. Auch der mathematische Unterricht diente vor allem der Schulung des logischen Denkens; er war ganz abstrakt und sah von der Anwendung in den Naturwissenschaften […] vollkommen ab.“[146]

Die Aussage Joh. Schulzes, Nachfolger Süverns als Referent für das Gymnasialwesen im Kultusministerium, dass „in einer Zeile Cornel mehr bildende Kraft läge als in der gesamten Math[ematik]“[147] ist zudem bezeichnend für den Stellenwert, den die Mathematik am Gymnasium nach wie vor einnahm.

Denjenigen Gymnasien, die sich durch Qualifikation der Schüler und Lehrer dazu in der Lage sahen, war es dennoch gestattet, über den geforderten Stoff hinauszugehen, jedoch „ohne dadurch die Gründlichkeit und den im Obigen angedeuteten Hauptzweck des mathemat. Unterrichts in den Gymn. zu gefährden“[148].

Zum Umfang der Abiturarbeiten geben §§ 16 und 17 des Reglements vom 4. Juni 1834 Auskunft. Demnach umfasste die Arbeit die Lösung von je zwei geometrischen und arithmetischen Aufgaben oder eine „Uebersicht und Vergleichung zusammengehöriger mathematischer Sätze“.[149] Als Bearbeitungszeit waren (inklusive Reinschrift) 4 Stunden am Vormittag vorgesehen. Für die Aufgaben wurden zuvor vom Fachlehrer und dem Schuldirektor mehrere zur Auswahl vorgelegt, aus denen der Kommissar des Schulkollegiums die zu bearbeitenden Aufgaben bestimmte.

3.1.4 Neuer Lehrplan 1856 und Abitur auf dem Realgymnasium 1859

Die Lehrpläne, die auf die Ordnung von 1834/37 folgten, brachten inhaltlich nur wenige Änderungen mit sich.[150] „Das Ergebnis der Gymnasialreform von

145 Zit. nach L. v. RÖNNE (1855), S. 226.
146 P. MAST (1989), S. 138.
147 Zit. nach M. SIMON (²1908), S. 18.
148 Zit. nach L. v. RÖNNE (1855), S. 226.
149 Vgl. bei ebd., S. 264.
150 W. LIETZMANN (²1926), S. 252.

1856 bestätigte die Lehrverfassung von 1837 in allen wesentlichen Zügen.“[151] Nur wenige Inhalte verschwanden aus den Lehrplänen, so die Kettenbrüche, diophantischen Gleichungen und die Kombinatorik.[152]

Die Formulierung der Anforderungen für die Abiturprüfung blieb gleichlautend mit jener von 1834.[153] Als Zusatz bei der Aufstellung der „Gegenstände der schriftlichen Prüfung“ führte WIESE an, dass darauf zu achten sei, „dass zur Lösung der Aufgaben nicht sowohl ein besonderes mathematisches Erfindungstalent als eine klare Auffassung der einzelnen Sätze und ihres Zusammenhangs vorausgesetzt werde.“[154] Des Weiteren waren nun fünf statt vier Vormittagsstunden zur Bearbeitung der schritlichen Arbeit angesetzt.[155]

Der Zusatz, dass sich „in der Mathematik […] die Anforderungen genau innerhalb der Grenzen zu halten [haben], welche der für die Gymnasien geltende Lehrplan festsetzt“[156], zeigt die weiterhin bestehende Angst der „klassischen Fächer“ vor einer zu großen Ausdehnung der Mathematik.

Für die neu eingeführten Abiturprüfungen der Realgymnasien galten gemäß der am 6. Oktober 1859 erlassenen Unterrichts- und Prüfungsordnung folgende Anforderungen:

> „Der Abiturient hat den Nachweis zu liefern, daß er auf dem ganzen Gebiete der Mathematik, soweit das Pensum der oberen Klassen ist (Kenntnis der Beweisführung sowie der Ausführungsmethoden einfacher Aufgaben aus der Algebra, die Lehre von den Potenzen, Proportionen, Gleichungen, Progressionen, der binomische Lehrsatz und die einfachen Reihen, die Logarithmen, die ebene Trigonometrie, Stereometrie, die Elemente der beschreibenden Geometrie, analytische Geometrie, Kegelschnitte; angewandte Mathematik: Statik, Mechanik), sichere, geordnete und wissenschaftlich begründete Kenntnisse besitzt, und daß ihm auch die elementaren Teile der Wissenschaft noch wohl bekannt sind. Ebenso muß Fertigkeit in allen im praktischen Leben vorkommenden Rechnungsarten, im Rechnen mit allgemeinen Größen und im Gebrauch der mathematischen Tafeln vorhanden sein. Auf strenge Beweisführung und auf Fertigkeiten in der Lösung der Aufgaben ist bei der Abiturientenprüfung besonderer Wert zu legen.“[157]

Die Geometrie gehörte also in sehr umfangreichem Maße von Anfang an zum Lehrstoff des Realgymnasiums.

Da einzelne Lehranstalten erheblich über die in den Lehrplänen geforderten Inhalte hinausgingen, führte dies zu einem ausdrücklichen Verbot der Infinitesimalrechnung und der analytischen Geometrie des Raumes.[158]

---

151 K.-E. JEISMANN (1996), Bd. 2, S. 608.
152 W. LIETZMANN (^{2}1926), S. 252.
153 L. WIESE (1864), S. 500 im Vergleich mit der oben wiedergegebenen Prüfungsordnung von 1834.
154 Ebd., S. 496.
155 Ebd., S. 497.
156 Ebd., S. 498.
157 Zit. nach W. LIETZMANN (^{2}1926), S. 254.
158 Ebd., S. 255.

3.1.5 Lehrpläne im 10-Jahres-Abstand (1882, 1892 und 1902)

Im genauen Abstand von jeweils zehn Jahren erschienen 1882, 1892 und 1902 neue Lehrpläne für die drei Formen der höheren Schulen. Sie brachten für die Gestaltung der Abiturarbeiten im Fach Mathematik keine erheblichen Neuerungen. Daher beschränke ich mich bei der kurzen Zusammenfassung der abiturrelevanten Bestimmungen hier auf Sekundärquellen, im Wesentlichen auf den 4. Band von L. WIESE 1902.

Nach den Plänen von 1882 gehörten zum schriftlichen Abitur in Mathematik weiterhin vier Aufgaben. Vom Fachlehrer mussten drei Gruppen von je vier Aufgaben vorgeschlagen werden; nach der Genehmigung durch den Rektor wählte der Königliche Kommissar eine Aufgabengruppe aus.[159]

Noch bis 1882 wurde bis in die Oberklassen das praktische Rechnen durchgeführt; das fiel nun durch die neuen Lehrpläne weg.[160] Als eine wesentliche Neuerung ist die Vorschaltung eines propädeutischen Unterrichts vor die Planimetrie zu nennen.[161] Die neuen abiturrelevanten Inhalte, die der Lehrplan 1882 (besonders für die Realanstalten) forderte, umfassten die synthetische Geometrie der Kegelschnitte (wieder nach 1834) und – besonders wichtig – die sphärische Trigonometrie mit den Anwendungen auf die mathematische Erd- und Himmelskunde.[162] Der besondere Wert des Raumvorstellungsvermögens der Schüler wurde dadurch hervorgehoben.

Die nach der sog. Dezemberkonferenz formulierten Lehrpläne von 1892 brachten kaum fachliche Neuerungen. Hervorzuheben ist die Einführung der analytischen Geometrie, die nun an allen preußischen Gymnasien betrieben wurde.[163] Durch die Zusammenfügung der Schulgattungen waren weitere leichte Änderungen notwendig.[164]

Die 1901/02 erschienenen Lehrpläne standen am Anfang der sog. Kleinschen Reform. Sie konnten die Reformbestrebungen, die sich nach ihrem Erscheinen in Bewegung setzten noch nicht aufgreifen. Für die Abiturarbeiten bedeuteten die neuen Pläne vor allem eine Verlängerung der Bearbeitungszeit und damit eine Ausdehnung der Aufgabenstellungen.[165]

---

159 L. WIESE (1902), S. 694.
160 W. LIETZMANN (^{2}1926), S. 255.
161 Ebd., S. 252.
162 Ebd., S. 255. ◊ Vgl. auch L. WIESE (1886), S. 395, 406 und 417f.
163 W. LIETZMANN (^{2}1926), S. 252.
164 L. WIESE (1902), S. 698.
165 Ebd., S. 704.

3.1.6 Die Meraner Reform und die Lehrpläne von 1925

Die unter dem Einfluss F. Kleins entstandenen sogenannten Meraner Vorschläge von 1905 enthielten auch allgemeine methodische Bemerkungen und Erläuterungen. In Bezug auf die Reifeprüfung in Mathematik wurde eine Abkehr von dem alten System der vier getrennten Aufgaben gefordert, die das Denken in größeren mathematischen Zusammenhängen erlaubte (vgl. dazu → *Kapitel 2.2.5*: das didaktische Prinzip).

> „In der Reifeprüfung wird sich die mathematische Ausbildung des Schülers und ihr Einfluß auf seine Ausbildung überhaupt am klarsten erkennen lassen, wenn von der jetzigen Forderung der Lösung von vier speziellen Aufgaben abgegangen wird und statt dessen einerseits eine zusammenhängende Darstellung eines allgemeinen Themas, andererseits die vollständige (rechnerische und zeichnerische) Behandlung einer Aufgabe verlangt wird. Ebenso dürfte bei der mündlichen Prüfung mehr Gewicht auf das Verständnis als auf das Auswendigwissen vieler spezieller Formeln zu legen sein.“[166]

Die Inhalte des mathematischen Unterrichts in der Prima des Gymnasiums teilen sich in die beiden Großbereiche Arithmetik und Geometrie auf. Im Bereich der Geometrie waren die Stereometrie, Grundbegriffe der sphärischen Trigonometrie und deren Anwendung auf die mathematische Erd- und Himmelskunde, Grundbegriffe der darstellenden Geometrie sowie die Darstellung räumlicher Gebilde und der Koordinatenbegriff (in Anwendung auf die Kegelschnitte) die zu behandelnden Teilgebiete. Großen Wert legten die Pläne dabei auf das geometrische Messen und Zeichnen. In der Arithmetik wurden verschiedene rationale und trigonometrische Funktionen behandelt, und – was als Besonderheit bemerkt werden darf – es wurden einfache Abbildungen durch Funktionen komplexer Variablen eingeführt.[167]

Die Lehrpläne für die Realgymnasien sahen in der Prima eine vertiefte Beschäftigung der oben genannten Themenbereiche vor, die hier analog zu LIETZMANN tabellarisch wiedergegeben werden soll:

Arithmetik	**Geometrie**
Aufbau des Zahlbereiches und Wiederholung der Funktionsarten. Ihre Behandlung mit infinitesimalen Methoden. Unendliche Reihen. Integralrechnung. Gleichungslehre. Funktionen komplexer Variablen.	Sphärische Trigonometrie mit mathematischer Erd- und Himmelskunde. Analytische Geometrie. Kegelschnittlehre. Grundriß – Aufrißverfahren. Perspektive. Kartenlehre.[168]

Den preußischen Lehrplänen von 1925 wurden ein allgemeines Lehrziel sowie methodische Bemerkungen für alle Schultypen vorangestellt. Im allgemeinen Lehrziel heißt es unter anderem:

166 Zit. nach W. LIETZMANN (²1926), S. 234.
167 Inhalte nach ebd., S. 253f.
168 Ebd., S. 255.

> „Erzielung der Fähigkeit, das Mathematische in Form, Maß, Zahl und Gesetzmäßigkeit an den Gegenständen und Erscheinungen der Umwelt zu erkennen und die gewonnene Erkenntnis selbständig anzuwenden […]. Schulung im logischen Schließen und Beweisen und ein gewisses Verständnis für den philosophischen Gehalt der mathematischen Verfahren und die geistesgeschichtliche Bedeutung der Mathematik."[169]

Zum Bereich der Infinitesimalrechnung wird gesagt, dass die Schüler

> „durch die Einführung infinitesimaler Methoden […] Kenntnis von dem wichtigsten Werkzeug der Mathematik [erhalten]. Hier hat der Unterricht einen Mittelweg zu suchen zwischen berechtigten Anforderungen an wissenschaftlicher Strenge und der Rücksicht auf die praktischen Bedürfnisse, und er wird das Hilfsmittel geometrischer Veranschaulichung ausgiebig benutzen müssen."[170]

Damit war der Grundstein für den Typus des heutigen Abiturs im Fach Mathematik gesetzt.

3.1.7 Mathematik in den nationalsozialistischen Lehrplänen

Der Nationalsozialismus hatte sich in Deutschland schon weit entwickelt, bevor er in Form neuer Lehrpläne konkreten Einfluss auf die Unterrichtsgestaltung nahm. Zwischen 1933 und 1937 erschienen zunächt unsystematisch Erlasse und Anweisungen zum Schulunterricht, die entscheidende Phase des schulischen Wandels vollzog sich in den Jahren 1938 bis 1949.[171] In diesen Jahren wurden die offiziellen und systematischen Richtlinien veröffentlicht, die das Reichserziehungsministerium erarbeitet hatte. Die Lehrpläne über „Erziehung und Unterricht in der Höheren Schule" traten 1938 in Kraft.[172]

Zur ideologischen Rolle der Mathematik heißt es in den Richtlinien:

> „Auch in ihrer Arbeit ist rassische Bedingtheit erkennbar. Nordischem Geist entspricht es, einen in innerer Anschauung geborenen Formenreichtum wie mit der schaffenden Hand so auch mit dem grübelnden Verstande zu erobern."[173]

Konkrete Aussagen zur Gestaltung der Abiturarbeiten werden nicht gemacht. Zur Themengestaltung heißt es, heimatbezogene, völkische, polit-ideologische und wehrkundliche Themen habe der Unterricht zu berücksichtigen.[174] NYSSEN stellt fest,

> „daß die Forderungen der Fachdidaktiker nach Änderung des Mathematikunterrichts nur als Floskeln Eingang in die Lehrpläne gefunden haben. Im Gegensatz: Die Lehrpläne für den Mathematikunterricht – insbesondere diejenigen für die Mittel- und Höhere Schule – zielen auf ein fundiertes mathematisches Wissen der Schüler."[175]

---

[169] Zit. nach W. LIETZMANN (²1926), S. 261f.
[170] Zit. nach ebd., S. 263.
[171] K.-I. FLESSAU (1977), S. 19.
[172] E. NYSSEN (1979), S. 89.
[173] *Erziehung und Unterricht in der Höheren Schule* (1938), S. 187. Zit. nach K.-I. FLESSAU (1977), S. 89.
[174] K.-I. FLESSAU (1977), S. 89.
[175] E. NYSSEN (1979), S.111.

Die Forderungen der Fachdidaktiker nach Reduzierung und Neuorientierung des Mathematikunterrichts fanden in den Richtlinien nur in geringerem Maße Niederschlag.

3.1.8 Die Lehrpläne der Nachkriegszeit

Nach dem Zusammenbruch des Deutschen Reiches musste auch die Schulmathematik an die Zeiten vor dem Krieg anknüpfen. So stehen die 1945 erlassenen Übergangslehrpläne noch ganz in der Tradition der Meraner Bestimmungen.

Die ersten „richtigen“ Lehrpläne wurden 1952 unter dem Titel „Richtlinien für den Unterricht in Mathematik und Physik an den Gymnasien im Lande NRW“ veröffentlicht.

Bevor ich näher auf die Lehrpläne der folgenden Jahre eingehe, möchte ich eine Studie vorstellen, auf die ich bereits im Sommersemester 2003 in einer Arbeit über den „Standort der Richtlinien zum Analysisunterricht“ Bezug genommen hatte.[176] Diese Studie stammt von I. KASTEN von der Universität Duisburg. Kasten bestimmte durch Vergleiche zur Häufigkeit des Auftretens von Standard-Begriffen (wie *Mathematik*, *Unterricht*, *Schüler*, *Lehrer*) Korrelationskoeffizienten, die als Maß für die Ähnlichkeit der „Profilstruktur“ von Richtlinien dienen.[177] Je höher der Korrelationskoeffizient ist, umso weniger einschneidende Veränderungen gibt es zwischen den einzelnen Richtlinien. Dabei ist zu beachten, dass die Richtlinien aller Schulstufen in die Studie einflossen. In unserem Kontext interessieren natürlich v. a. die oberstufenbezogenen Pläne von 1952, 1963, 1972, 1981 und 1999. Als Bezugspunkt wählte KASTEN die Richtlinien für die Sekundarstufe I von 1993. Die Korrelationskoeffizienten sind im Diagramm Abb. 1 dargestellt.

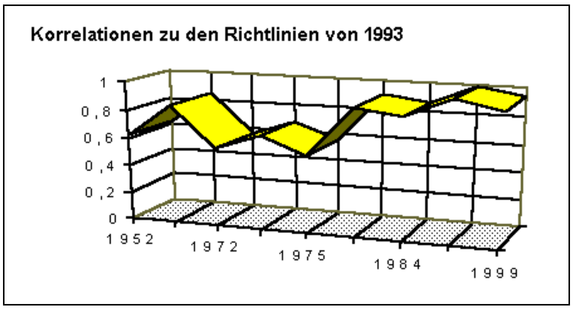


Abb. 1
Richtlinien-Korrelationen
nach I. KASTEN

---

176 Universität Siegen, Sommersemester 2003, Seminar „Didaktik der Analysis“ (Prof. Dr. Rainer Danckwerts), Referat und Ausarbeitung zum Thema „*Die staatlichen Vorgaben. Der Standort der Richtlinien zum Analysisunterricht*“ von Simone Löcherbach und Gabriel Isenberg.

177 Vgl. I. KASTEN (2000).

KASTEN fasst das Resultat seiner Untersuchungen zusammen:

> „Wir sehen, dass es durchaus eine Entwicklung der Konzeptionen von Mathematik-Richtlinien gibt. Einschneidende Veränderungen der Konzepte des Mathematik-Unterrichts (wie z. B. die Einführung der Mengenlehre bei der ‚Neuen Mathematik') spiegeln sich auch deutlich in den Texten der Richtlinien wider, nicht nur in den Themen. Einen solchen deutlichen Bruch ‚mit der Vergangenheit' stellen die neuen Richtlinien von 1999 nicht dar."[178]

Zum Abitur machen die Richtlinien von 1952 keine explizite Aussage. Dagegen werden zu Beginn Bildungsziele des Faches Mathematik formuliert:

> „1. Klares und folgerichtiges, kritisches und selbständiges Denken.
> 2.Weckung des Abstraktionsvermögens, Pflege und Ausbildung der Raumanschauung.
> 3. Ausbildung der Fähigkeit, längere Gedankenreihen zu überblicken und Entwicklung des Sinnes für Ganzheiten.
> 4. Entwicklung der mathematischen Phantasie.
> 5. Logisch einwandfreie Ausdrucksweise.
> 6. Bewußtsein der Verantwortung für die Richtigkeit einer Behauptung, Gefühl für die Unabänderlichkeit von Tatsachen (Unmöglichkeitsbeweise).
> 7. Erziehung zum sauberen und genauen Arbeiten.
> 8. Gefühl für die der Mathematik eigene Schönheit, die sich in anschaulichen oder abstrakten Entwicklungen und den Gesetzen von Zahlen und Formen offenbart.
> 9. Entwicklung der Fähigkeit, Größenbeziehungen in der Umwelt und gesetzliche Abläufe in ihr aufzufassen und in mathematische Form zu kleiden.
> 10. Bewußtmachen der Grenzen, die dem mathematischen Denken und Erkennen gesetzt sind."[179]

Der Unterrichtsstoff wird in die zwei Themenbereiche „Geometrie" und „Rechnen, Arithmetik, Algebra und Analysis" eingeteilt. Zu den Themengebieten der Prima (und somit auch des Abiturs) gehörten die Infinitesimalrechnung mit Anwendung auf geometrische und physikalische Fragen, die analytische Geometrie der Geraden und des Kreises, dazu die Kegelschnitte und auf dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium zusätzlich die komplexen Zahlen (mit vektorieller Veranschaulichung).

Die seit 1963 geltenden „Richtlinien für den Unterricht in der Höheren Schule" für das Fach Mathematik formulierten nun explizit Bestimmungen für die Reifeprüfung:

> „Die Prüfung soll Verständnis für mathematische Zusammenhänge, nicht nur die Befähigung zum Lösen von Einzelaufgaben erkennen lassen.
> Um ein möglichst vollständiges Bild von der Leistungsfähigkeit des Prüflings zu erhalten, wird man die verschiedenartigen Möglichkeiten auszuschöpfen suchen, die sich durch die Eigenart der schriftlichen und der mündlichen Prüfung sowie der Aufgaben und Themen ergeben.
> **1. Schriftliche Prüfung**
> a) Innerhalb eines jeden Vorschlags ist füe das mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium neben den Aufgaben die Behandlung eines Themas zu fordern. Bei den anderen Formen des Gymnasiums kann auf das Thema verzichtet werden. Aufgaben und Thema eines Vorschlags sollen aus verschiedenen Gebieten gewählt sein und unter Anwendung der im Unterricht erarbeiteten Methoden selbständige, nich rein reproduktive Leistungen erfor-

178 I. KASTEN (2000).
179 Richtlinien für den Unterricht in Mathematik und Physik an Gymnasien (1952), S. 5.

dern. Der Umfang der Aufgaben ist so zu beschränken, daß für eine sprachlich angemessene Gestaltung ausreichend Zeit bleibt.

b) Bei der Lösung der Aufgaben ist auf saubere Zeichnungen, besonders aber auf eine sprachlich richtige und logisch einwandfreie Darstellung Wert zu legen. Aufgaben, zu deren Lösung der Prüfling sich nur eines Schemas zu bedienen braucht, sind zu vermeiden. Der Text soll Begründungen für die einzelnen Schritte und Hinweise auf Besonderheiten der Methode enthalten.
Die üblichen Hilfsmittel (Funktionstafel, Rechenstab, Formelsammlung) sind zugelassen.

c) Das Thema ist in Aufsatzform zu behandeln. An der Art seiner Bearbeitung wird besonders deutlich,
wieweit der Prüfling mathematische Begriffe und Zusammenhänge erfaßt hat,
wieweit ihm der geistige Hintergrund und das Wesen grundlegender Arbeits- und Beweismethoden bewußt geworden
und inwieweit er Verständnis für wissenschaftstheoretische und philosophische Fragen der Mathematik gewonnen hat.
Die Fragen sollen nicht zu eng, aber konkret und bestimmt formuliert sein, so daß der Kern der Fragestellung klar umrissen ist. […]“[180]

Damit ist die Gestaltung der Aufgaben umrissen, aber doch sehr ungenau bestimmt. Die Form des thematischen Aufsatzes greift auf frühere Formen von mathematischen Abiturarbeiten zurück und ist ein probates Mittel, das Verständnis mathematischer Sinnzusammenhänge zu überprüfen. Einerseits wird damit dem sinnentleerten Anwenden eingeübter Muster entgegengewirkt, andererseits gibt diese Art der Aufgabenstellung nur wenig Raum für eigenverantwortliches Weiterentwickeln jener eingeübter Muster (Stichwort Problemlöseverfahren etc.). Das dürfte ein Grund dafür sein, dass außerhalb des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums nur kaum Gebrauch von dieser Prüfungsart gemacht wurde (Ausnahme: Beispielaufgabe → *Kapitel 3.2.3*); am neusprachlichen Gymnasium Stift Keppel fand diese Art der Aufgabenstellung keine Anwendung.

Eine thematische Einordnung der Abiturprüfung ist damit allerdings nicht gegeben. Sie erschließt sich aus den Anforderungen an die Unterrichtsinhalte der Oberstufe (speziell Jahrgangsstufen 12 und 13). Diese seien hier den Richtlinien entsprechend zusammengefasst:[181]

<u>Mathematisch-naturwissenschaftliches Gymnasium</u>: a) Bestimmtes Integral als Grenzwert; Maßzahlfunktion; unbestimmtes Integral; Ausbau der Infinitesimalrechnung mit Anwendungen (gebrochen rationale Funktionen, Wurzelfunktionen, trigonometrische Funktionen, exp- und log-Funktionen). b) Aufbau des Körpers der reellen Zahlen (Gruppe, Ring, Körper; das System der rellen Zahlen als Ordnungsstruktur). c) Analytische Geometrie (Kegelschnitte unter besonderer Berücksichtigung des Abbildungsgedankens und der darstellenden Geometrie). d) Wahlthemen.

---

180 Richtlinien für den Unterricht in der Höheren Schule (1963), S. 33.
181 Vgl. ebd., S. 15ff.

Sprachliches Gymnasium, Sozialwissenschaftliches Mädchengymnasium: a) Konvergenz und Divergenz. b) Infinitesimalrechnung (ganze und einige gebrochen rationale Funktionen, best. und unbest. Integral). c) Analytische Geometrie der Geraden und des Kreises; die Ellipse als senkrecht affines Bild des Kreises. d) Aufbau des Körpers der reellen Zahlen.

Dazu wurde die durchgehende Behandlung fundamentaler Begriffe empfohlen: 1. Zahlbegriff, 2. Grenzwert, 3. Funktion, 4. Abbildung in der Geometrie, 5. Vektor, 6. Menge / Struktur. Damit wurde an das „didaktische Prinzip", wie es in den Meraner Plänen dargelegt wurde (→ *Kapitel 2.2.5*), angeknüpft. Diese fundamentalen Begriffe dienten als Vorlage für die zentralen Ideen der heutigen Lehrpläne.

Dieses System der Schulmathematik erwies sich bald als überholt, so dass die Kultusministerkonferenz 1968 neue „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen" herausgab. Diese machten keine konkreten Angaben zum Abitur. Jedoch strukturierten sie den Oberstufenunterricht in Themenkreise:[182]

1. Themenkreis: Analysis;
2. Themenkreis: Vektorraum, affiner und metrischer Raum;
3. Themenkreis: Geometrische Abbildungen;
4. Themenkreis: Strukturen (Ringe, Körper; Boolescher Verband; Geometrien);
5. Themenkreis: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, moderne mathematische Techniken.

Diese Neustrukturierung wies den Weg zur späteren Einteilung in die drei Hauptgebiete der Schulmathematik (Analysis, Lineare Algebra/Geometrie, Stochastik). Außer einer Umstrukturierung der Themen blieben die Inhalte jedoch noch weitgehend die vorigen.

3.1.9 Mathematik im Abitur der differenzierten Oberstufe

Mit der Einführung der differenzierten Oberstufe 1972 wurden auch Curricula für die einzelnen Fächer veröffentlicht. Das 1972 erschienene „Curriculum Gymnasiale Oberstufe. Mathematik" versteht sich als „Empfehlungen für den Kursunterricht im Fach Mathematik". Damit bildet diese Veröffentlichung keinen Lehrplan im eigentlichen Sinne, sondern stellt Unterrichtspläne als Orientierungshilfe zur Unterrichtsgestaltung dar; sie war zunächst eine „erste Lehr-

182 Empfehlungen und Richtlinien (1968), S. 9f.

planhilfe für die Fachlehrer […], die an der am 1.8.1972 beginnenden Versuchsreihe zur Neugestaltung der gymnasialen Oberstufe […] beteiligt sind."[183] Demnach gehen daraus auch keine konkreten Hinweise zu den Abiturprüfungen hervor. Aus den Aussagen zur Unterrichtsgestaltung lassen sich allerdings Rückschlüsse auf die Abituranforderungen ziehen.

Laut Vorbemerkungen wurde gegenüber den Richtlinien von 1963 „ein größerer Anteil neuerer Stoffe aufgenommen, insbesondere aus der angewandten Mathematik, während einige dort genannte andere Stoffe in den Hintergrund treten."[184]

Einen Überblick über die vorgesehenen Themengebiete gibt abermals das Inhaltsverzeichnis:

- Leistungskurse:
  - Analysis I bis III
  - Lineare Algebra und analytische Geometrie
  - Aufbau des Zahlensystems
  - Synthetische und analytische Abbildungsgeometrie
  - Numerische und graphische Methoden
  - Algebraische Strukturen
  - Informatik
  - Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
  - Grundlagen der Mathematik (nichteuklidische Geometrie)
- Grundkurse, zugleich Ergänzungskurse
  - Boolesche Algebra mit Schaltalgebra
  - Lineares Optimieren
  - Sphärik
  - Komplexe Zahlen
  - Informatik
  - Nichteuklidische Geometrie
- Weitere Grundkurse
  - Analysis A I bis III, B I bis II
  - Vektorielle lineare analytische Geometrie und lineare Algebra
  - Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
  - Wirtschaftsmathematik
  - Gruppentheorie
  - Endliche Geometrien[185]

Damit ist ein deutlicher Schnitt gegenüber den vorhergehenden Richtlinien gezogen. Dies zeigt im Übrigen auch der niedrige Korrelationskoeffizient für 1972 bei KASTEN (s. o.).

Die Analysis als fester Bestandteil des Curriculums blieb erhalten, erweitertert bspw. durch die lineare Optimierung als geeignetes Medium eines Brückenschlags zu anwendungsorientierten Fragestellungen. In der Geometrie fiel der Bereich der Kegelschnitte weg, die Abbildungsgeometrie blieb bestehen, mit der Sphärik wurde auf die große Bedeutung der sphärischen Trigonometrie

[183] Curriculum (1972), S. 159.
[184] Ebd., S. 10.
[185] Nach ebd., S. 3.

der Vorkriegszeit zurückgegriffen. Der Bereich der Stochastik wurde erweitert und erstmals fanden neue Technologien Einzug in die Mathematik-Richtlinien, besonders in Form des Themengebiets Informatik.
Die Herangehensweise an die Themen scheint sehr technisch und formal zu sein. Mit einem hohen fachmathematischen Standard wurde versucht, Anschluss an die Hochschulmathematik zu finden.[186] Somit trat zwar der Bereich der angewandten Mathematik durchaus erweitert auf, das geschah aber zunächst auf einer recht abstrakten Ebene.

Erst im Laufe der 1970er Jahre wurde die reformierte Oberstufe an allen Schulen eingeführt, und nach den nun gesammelten Erfahrungen konnten 1981 die neuen „Richtlinien für die gymnasiale Oberstufe in Nordrhein-Westfalen" für das Fach Mathematik formuliert werden. Diese gehen nun auch ausführlich auf die Gestaltung und Anforderung im Abitur ein. Die dazu gemachten Aussagen sollen hier erläutert werden.
Um den gegensätzlichen Extremen einer „bloße[n] Wiedergabe gelernten Wissens" und einer „Überforderung durch Problemfragen, die vom Schüler in der Prüfungssituation nicht angemessen bearbeitet werden können,"[187] entgegenzuwirken, werden die Prüfungsanforderungen in drei Anforderungsbereiche strukturiert. Um die Aufgaben den Anforderungsbereichen zuordnen zu können, werden dazu nähere Erläuterungen gegeben, die ich hier kurz zusammenfassen möchte:
<u>Anforderungsbereich I</u>: Reproduktiver Bereich (z. B. Wiedergabe von Kenntnissen). Hierunter zählen Aufgaben, die im gelernten Zusammenhang stehen, gelernte und geübte Arbeitstechniken abfragen und wiederholenden Charakter besitzen.
<u>Anforderungsbereich II</u>: Operativer Bereich (z. B. Anwenden von Kenntnissen). Bei diesen Aufgaben geht es nicht um die bloße Reproduktion von Gelerntem, sondern um die selbständige Übertragung dessen auf neue Sachverhalte, z. B. Beweise, die in ihrer Beweisführung von den Beispielen aus dem Unterricht in bestimmten Punkten abweichen.
<u>Anforderungsbereich III</u>: Kreativer Bereich (z. B. Problemlösen und Werten). Hier kann der Schüler seine erworbenen Fertigkeiten im Umgang mit der Materie unter Beweis stellen. Es geht um das selbständige Auswählen und Anpassen von Problemlöseverfahren und eine damit zusammenhängende Auswertung.

186 Vgl. Curriculum (1972), S. 10.
187 Richtlinien für die gymnasiale Oberstufe (1981), S. 119.

Das Schwergewicht der zu ergbringenden Prüfungsleistungen sollte im Anforderungsbereich II liegen, bei ansonsten deutlich höherer Berücksichtigung des Anforderungsbereichs I gegenüber III.[188] Mit der Formulierung dieser drei Bereiche war erstmals ein wirksames Instrument geschaffen, um Vergleichbarkeit in Struktur und Anforderung der Abituraufgaben zu gewährleisten.

Inhaltlich sollten die Aufgaben den Unterrichtsstoff der Jahrgangsstufen 11 bis 13 widerspiegeln, der die drei Lernbereiche Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik umfasst. Im Leistungskurs werden drei, im Grundkurs zwei Aufgaben gestellt, eine thematisch geschlossene Gesamtaufgabe, wie sie bis dahin möglich war, gab es nicht mehr. Die Lehrpläne unterscheiden acht verschiedene Arten von Aufgaben bzw. Teilaufgaben:

> „(1) Ermittlung eines konkreten Einzelergebnisses […]
> (2) Darstellung und Erläuterung von mathematischen Verfahren
> (3) Untersuchung vorgegebener mathematischer Objekte auf ihre Eigenschaften, ggf. mit Hilfe von Fallunterscheidungen
> (4) Konstruktionen
> (5) Auswertung empirischer Vorgaben
> (6) Beweise […]
> (7) Vergleich verschiedener Ergebnisse, verschiedener Lösungswege oder verschiedener Verfahren; Diskussion von Zusammenhängen
> (8) Übertragen der Ergebnisse einer Untersuchung auf einen anderen Sachverhalt“[189]

Die konkreten Grundsätze zur Aufgabenkonstruktion seien hier wörtlich zitiert:

> „(a) In jedem Abiturvorschlag müssen wenigstens zwei Lernbereiche erfaßt sein. Es ist unerläßlich, daß die Analysis zumindest in einer Aufgabe eines jeden Abiturvorschlags berücksichtigt wird.
> (b) Der Beginn mit Analysis in der Jahrgangsstufe 11 braucht das Einbringen dort behandelter Probleme innerhalb weitergehender Anforderungen aus der Jahrgangsstufe 12 in die Konstruktion von Abituraufgaben nicht auszuschließen.
> (c) Wegen der geringen Zahl der Aufgaben einer Prüfungsarbeit [drei im Leistungskurs und zwei im Grundkurs] müssen diese i. a. in mehrere Teilaufgaben gegliedert werden, die zugleich einen Leitfaden zur Problemlösung in Frage- oder Anweisungsform darstellen, der nicht zu eng gefaßt sein darf.
> (d) Die Teilaufgaben sollen, wenn möglich numerisch unabhängig sein. Dies kann u. U. durch Nennung eines Zwischenergebnisses oder einer Varianten eines Teilresultates – z. B. einer affin verzerrten Ersatzfunktion – erreicht werden. Die Teilaufgaben müssen jedoch im Problemzusammenhang stehen.
> (e) Die Forderung nach Selbständigkeit der Leistung ist so einzubringen, daß dadurch ein Grunderfolg nicht unbedingt beeinträchtigt wird. Das kann durch sorgfältige Wahl der Position der Teilaufgaben geschehen. Schwierige Teilaufgaben sollten nicht von vorneherein als solche gekennzeichnet werden.
> (f) Die Aufgaben eines jeden Abiturvorschlages sollen in der Regel etwa gleiches Gewicht besitzen.
> (g) Für einen der beiden Vorschläge ist eine geschlossene Darstellungsaufgabe zulässig, die in besonderer Weise die Fähigkeit zur sprachlichen Formulierung mathematischer Zusammenhänge prüft. Der Erwartungsrahmen einer solchen Aufgabe ist enger zu fassen, als dies früher beim mathematischen Aufsatz üblich war.

[188] Vgl. Richtlinien für die gymnasiale Oberstufe (1981), S. 122.
[189] Ebd., S. 121f.

(h) Eine nicht zu knappe textliche Gestaltung mit Ansatzerläuterungen, Ergebnisdiskussionen und ähnlichem gehört bei allen Aufgaben zu den Prüfungsforderungen.
(i) Alternative Aufgaben oder auch nur alternative Teilaufgaben sind nicht zulässig.
(k) Werden Aufgaben aus anderen als innermathematischen Anwendungsbereichen gestellt, so ist bei ihrer Vorlage darzustellen, auf welche Weise gleichwertige Lernvoraussetzungen im Unterricht geschaffen und gesichert wurden.
[…]“[190]

Durch zwei Aufgabenbeispiele bekommt der Lehrer anschauliche Beispiele an die Hand, um seine eigenen Aufgaben nach diesen Maßstäben konstruieren zu können. Die erste Aufgabe ist aus dem Bereich Lineare Algebra/Geometrie gewählt und für den Leistungskurs konzipiert. Sie soll hier wiedergegeben werden:

„$(F^{(2)},+,\cdot)$ sei der Vektorraum (über $\mathbb{R}$) der zweimal differenzierbaren reellen Funktionen, L sei die Menge der Funktionen $f \in F^{(2)}$, für die gilt: $f'' + f = 0$.
Zeigen Sie:
a) $(L,+,\cdot)$ ist Unterraum von $(F^{(2)},+,\cdot)$.
b) $\{\sin, \cos\}$ ist ein System linear unabhängiger Vektoren in $(L,+,\cdot)$.
c) Ist $f \in L$, so sind die durch $g = f \cdot \sin + f' \cdot \cos$, $h = f \cdot \cos - f' \cdot \sin$ definierten Funktionen g und h konstant.
Setzen Sie für den folgenden Aufgabenteil $g(x) = a$, $h(x) = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
d) $\{\sin, \cos\}$ ist ein Erzeugendensystem von $(L,+,\cdot)$.
e) Sind $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und ist $x_1 - x_2$ **kein** ganzzahliges Vielfaches von π, so ist die Abbildung $A: (L,+,\cdot) \to (\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ mit $A(f) := (f(x_1), f(x_2))$ für alle $f \in L$ ein injektiver Vektorraumhomomorphismus. – A ist dann sogar ein Isomorphismus! Warum?“[191]

Dieses Beispiel setzt einen guten Überblick der Schüler über die mathematischen Strukturen voraus. Es beschäftigt sich, anders als die „üblichen“ Lin. Algebra/Geometrie-Aufgaben nicht mit konkreten Punkten, Geraden und Ebenen im Raum, sondern mit abstrakten Oberbegriffen. Laut angegebenem Erwartungshorizont entprechen die Aufgabenteile a) bis c) weitgehend dem Anforderungsbereich II, basieren also auf Kenntnissen und Operationen, die aus dem Unterricht bekannt sind. Teil d) und der Nachweis der Injektivität in e) gehören zu Anforderungsbereich III.[192] Um schon auf die folgenden Untersuchungen von Abituraufgaben vorzugreifen, kann gesagt werden, dass diese Art der Aufgabenstellung in der Praxis eher selten anzutreffen ist. In ihrer Abstraktheit und den Bezügen zur Mengen- und Abbildungslehre entspricht sie noch ganz dem Geiste der Neuen Mathematik. Anwendungsbezogene Elemente lassen sich erst im dritten Beispiel zur mündlichen Abiturprüfung erkennen (Berechnungen zum Bruttosozialprodukt unter Anwendung des Programmes BASIC).

190 Richtlinien für die gymnasiale Oberstufe, S. 122f.
191 Ebd., S. 127.
192 Ebd., S. 127f.

Die jüngsten Lehrpläne für die Sek. II in Mathematik stammen von 1999. Wie schon KASTEN feststellte (→ *Kapitel 3.1.8*), sind ihre Veränderungen gegenüber den Plänen von 1981 nicht so groß, wie innerhalb der Pläne der 1960er/70er Jahre. Es gibt nur wenige grundlegende Änderungen gegenüber 1981.
In Bezug auf das schriftliche Abitur wurden die Bestimmungen komprimiert. Die Festlegung der drei Anforderungsbereiche wurde beibehalten. Eine der wichtigsten Hinzufügungen ist die Bemerkung, dass programmierbare Taschenrechner und Computer als Hilfsmittel vorgesehen werden können.[193] Denn dadurch wird dem Schüler die zeitraubende Arbeit schematischer Rechenvorgänge genommen, so dass für selbständige Arbeitsverfahren und heuristische Methoden mehr Zeit gewonnen wird.
In den sechs Beispielaufgaben ist gegenüber 1981 eine sehr deutliche Betonung anwendungsorientierter Problemstellungen zu erkennen.
Aufgabe 1 (GK) ist aus dem Bereich der Analysis und beschäftigt sich mit praktischen Fragestellungen zur Gestaltung eines Wassertanks. Aufgabe 2 (LK, Analysis) behandelt Näherungsrechnungen, die das Rechnen mit ganzen und gebrochen rationalen und nicht-rationalen Funktionen auf der Grundlage der Grundrechenarten in der Computertechnik erlauben. Aufgabe 3 (GK, Algebra) ist am ehesten „gewohnter Standard“, sie beschäftigt sich mit Berechnungen der vektoriellen Geometrie unter Verwendung des Matrixbegriffs. In der vierten Aufgabe (LK, Algebra) werden ähnliche Rechnungen auf abstrakterer Ebene geführt, aber in Beziehung zu alltägichen Vorgängen gesetzt (Umfüllvorgänge). Aus dem Bereich der Stochastik sind die Aufgaben 5 (GK) und 6 (LK); die Aufgabenstellungen gehen über die typischen Anwendungen (Würfeln, Urnen etc.) hinaus und beziehen reale Fragestellungen mit ein (z. B. der Bezug von Aufgabe 6 auf einen Artikel aus der Frankfurter Rundschau vom 27.11.1984).

Sollte man also die Entwicklung der Abituraufgaben anhand der Lehrpläne seit Einführung der differenzierten Oberstufe schlagwortartig zusammenfassen, so könnte man sagen: Vom Abstrakten zum Konkreten. Denn, während die Lehrpläne von 1972 noch ganz in der Tradition der Neuen Mathematik die Exaktheit mathematischer Formalität vermitteln, so lässt sich in jüngster Zeit eine deutliche Anbindung an außermathematische Fragestellungen und Modellbildungsprozesse erkennen, die in direkter Verbindung mit den in → *Kapitel 2.1.* zusammengestellten Überlegungen steht.

---

193 MSWWF (1999), S. 75.

3.2. Sammlungen von Abituraufgaben

Nachdem sich das vorige Kapitel (→ *Kapitel 3.1.*) mit den offiziellen Anforderungen an die Abituraufgaben befasste, soll es nun um die konkrete Umsetzung dieser Anforderungen gehen. In → *Kapitel 4.* möchte ich das beispielhaft anhand des Schularchivs des heutigen Gymnasiums Stift Keppel machen. Hier soll nun zunächst – um nicht direkt auf spezielle Eigenarten einer Schule eingehen zu müssen – ein allgemeiner Blick auf die Umsetzung der Anforderungen geworfen werden.

Dazu eignen sich Sammlungen von Abituraufgaben in besonderer Weise, stellen sie doch einen repräsentativen Durchschnitt der Abiturprüfungen einer bestimmten Zeit dar. Ich möchte mich dabei allerdings auf einige wenige Beispiele beschränken, um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen. Mit den Werken von Hermann MARTUS sind das 19. und der Anfang des 20. Jahrhunderts abgedeckt. Für die Zeit nach der Meraner Reform stand das Werk von LUDWIG-STELZIG für die Geometrie zur Verfügung. Und die Zeit um 1970 (Neue Mathematik, Oberstufenreform) ist mit mehreren Sammlungen vertreten.[194]

3.2.1 Aufgabensammlungen von Hermann MARTUS 1865 und 1901[195]

Für das 19. und beginnende 20. Jahrhundert gibt M. SIMON eine Übersicht über die wichtigen Abituraufgaben-Sammlungen.[196] Als wichtigstes Werk nennt er die Sammlung von Hermann MARTUS, die hier näher besprochen werden soll. Daneben nennt er W. ERLER[197] sowie für die darstellende Geometrie ein Werk von J. STEINER[198]. Darüberhinaus verweist er auf die zahlreichen, verstreuten Sammlungen in Programmen und Journalen.

Hermann C. E. MARTUS war Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. Er sammelte systematisch alle mathematischen Reifeprüfungsaufgaben aus

194 Die Auswahl der Aufgabensammlungen ist nicht repräsentativ. Ein Auswahlkriterium war durch den Bestand der Schulbibliothek des Gymnasiums Stift Keppel gegeben. Da ich hier vorwiegend Veröffentlichungen aus dieser Bibliothek verwende, liegt es nahe, dass diese Werke in irgendeiner Weise mit Unterricht und Abitur an Stift Keppel in Verbindung stehen, womit ein Bezug zum folgenden Kapitel gegeben wäre.

195 Mir lagen für diese Arbeit folgende Ausgaben vor: H. MARTUS Bd. 1 (^{10}18979 und (^{11}1903), Bd. 3 (^{1}1901) und Bd. 4 (^{2}1906).

196 Vgl. M. SIMON (^{2}1908), S. 199.

197 Evtl. W. ERLER (^{7}1911): *Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung*. Leipzig.

198 Bei W. LIETZMANN (^{2}1926), S. 344, findet man den Verweis auf „Steiners Schrift in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften, 60). Vermutlich bezieht sich M. SIMON darauf.

den Jahresberichten[199] der Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen in Preußen und stellte sie zu einer Sammlung unter dem Titel „Mathematische Aufgaben“ zusammen. Dem 1. Teil (1. Auflage 1865, 11. Auflage 1903) wurden in einem 2. Teil (1. Auflage 1865, 13. Auflage 1903) die entsprechenden Ergebnisse beigegeben. Darauf folgten ein 3. und 4. Teil, wieder aufgeteilt in Aufgaben- und Ergebnisband (1. Auflage 1901, 2. Auflage 1904 bzw. 1906).

Um einen Überblick zu geben, welche Bereiche der Mathematik die Aufgaben umfassen, sei hier zunächst das Inhaltsverzeichnis des 1. Bandes zusammengefasst wiedergegeben[200]:

Raumlehre (Geometrie)

A. Ebene Figuren (Planimetrie)
- I. Lehrsätze
- II. Herstellungsaufgaben: Dreieck, Viereck, Kreis
- III. Aufgabenlösen mittels Rechnung: Formelentwicklung, Berechnung

B. Dreiecksrechnung (Trigonometrie)
- I. Winkelfunktionen untereinander und in Bestimmungsgleichungen
- II. Dreiecksrechnung für die Ebene: rechtwinkliges und schwiefwinkliges Dreieck, Viereck, Vieleck, Kreis, Anwendung der Dreiecksrechnung auf Längenbestimmung
- III. Kugeldreiecksrechnung (Sphärische Trigonometrie): reine Mathematik und Anwendungen

C. Körperlehre (Stereometrie)
- Pyramide, Prisma, Kegel, Cylinder, Kugel, regelmäßige Körper, größter und kleinster Wert unter abhängigen Größen

D. Achsen-Raumlehre (Analytische Geometrie)
- Gerade Linie, Kreis, Parabel, Ellipse, Hyperbel, alle drei Kegelschnitte, Kurven höheren Grades

Zahlenlehre (Arithmetik)

A. Lehre von den Gleichungen (Algebra)
- I. Gleichungen vom ersten und zweiten Grade und solche Gleichungen höherer Grade, welche sich auf diese zurückführen lassen: Gleichungen in Zeichen und in Worten, aus Rechenaufgaben zu bilden und aus der Raumlehre
- II. Diophantische Gleichungen
- III. Gleichungen dritten Grades (kubische Gleichungen): Aufsuchen der rationalen Wurzeln, Entwicklung der Gleichungen
- IV. Höhere Gleichungen: u. a. transzendente Gleichungen (exp, Winkelfunktionen etc.)

B. Niedere Analysis
- I. Reihen: 1. Ordnung (arithmetische R.), Restreihen höherer Ordnung, Bruchreihen ersten (geometrische R.) und höherer Ordnung)
- II. Zins auf Zins: Zinseszins- und Rentenrechnung
- III. Kettenbrüche
- IV. Kombinationslehre: Permutationen, Variationen, Kombinationen, Wahrscheinlichkeitsrechnung
- V. Anwendung des binomischen Lehrsatzes
- VI. Die endlosen Reihen

---

199 Nicht selten wurden die Reifeprüfungsaufgaben in den Jahresberichten der Schulen abgedruckt. Damit sollten Stand und Qualität der Lehre nach außen hin präsentiert werden. Wie LIETZMANN bemerkt, mochte das „einer der Gründe [sein], warum nicht selten kniffliche Aufgaben gestellt werden; nicht wenige Lehrer wollen bei dieser Gelegenheit auch der Außenwelt zeigen, wie herrlich weit sie es mit ihren Schülern gebracht haben.“ (W. LIETZMANN (^{2}1926), S. 207).

200 Bezogen auf die elfte Auflage (Bd. 1).

Aufgaben aus der Physik
I. Mechanik
II. Wärmelehre
III. Lehre vom Licht (Optik)

Der große Bereich der Infinitesimalrechnung ist hier noch komplett ausgeschlossen. Die Geometrie ist in der Anzahl der Aufgaben leicht stärker vertreten als die Arithmetik (755 Aufgaben zu 645), auf die Aufgaben aus der Physik ist mit 100 Aufgaben nur wenig Gewicht gelegt.[201] Im Vorwort zur ersten Auflage schreibt Martus selber, dass auf dem Gebiet der Arithmetik nur eine spärliche Anzahl von Prüfungsaufgaben zu finden war, so dass er diese, um eine bessere Ausgewogenheit zu erreichen, durch eigene Aufgaben ergänzen musste.[202] Wie sehr dieses Buch als Vorlage für das Verfassen von Reifeprüfungsaufgaben diente, zeigte sich darin, dass viele seiner ergänzten Aufgaben bald auch in den Reifeprüfungen verwendet wurden, wie er im Vorwort zur zweiten Auflage schreibt.[203] Damit dürfte die MARTUSsche Sammlung einen repräsentativen Querschnitt durch den Bestand sowie die Veränderungen der mathematischen Reifeprüfungsaufgaben des 19. Jahrhunderts geben.

Da in den späteren Auflagen auch die Vorworte zu den früheren Auflagen abgedruckt waren, können die Veränderungen, die im Laufe der Zeit vorgenommen wurden, verfolgt werden:

2. Auflage 1869: Umstellung vom Längenmaß preuß. Fuß auf Meter; neue Aufgaben besonders in den Abschnitten Dreiecksrechnung, Aufgaben über den größten oder kleinsten Wert unter abhängigen Größen, v. a. Achsen-Raumlehre und Mechanik.

6. Auflage 1883: Umstellung von der geographischen Meile auf Gradangaben und Kilometer; neue Rechtschreibung.

8. Auflage 1890: Einführung der Zählung der Längengrade von Greenwich.

10. Auflage 1897: Einführung der M.E.Z.; die Aufgaben über Kettenbrüche, Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden zurückgenommen, „weil sie Gebieten angehören, welche jetzt im Unterrichte zurücktreten“[204]; hintere Stellen bei Dezimalbrüchen wurden gestrichen.

Der 2. Doppelband (Teil 3 und 4) von 1901 umfasst weniger Themenbereiche:

1. Dreiecksrechnung (Trigonometrie)
   1. Das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck - 2. Das schiefwinklige Dreieck - 3. Viereck - 4. Kreis - 5. Höhen- und Entfernungsbestimmungen - 6. Beziehungen zwischen Winkelfunktionen

---

201 Zahlenangaben bezogen auf die 11. Auflage (Bd. 1).
202 H. MARTUS Bd. 1 ([11]1903), S. IV.
203 Ebd., S. VIII.
204 Ebd., S. X.

2. Körperlehre (Stereometrie)
   1. Prisma - 2. Pyramide - 3. Cylinder - 4. Kegel - 5. Kugel - 6. Die regelmäßigen Körper - 7. Größter und kleinster Wert
3. Reihen und Zins auf Zins
   1. Restreihen - 2. Bruchreihen - 3. Zinseszinsrechnung - 4. Rentenrechnung
4. Gleichungen 3. Grades
   1. Ausrechnung ohne Winkelfunktionen - 2. Ausrechnung mit Winkelfunktionen
5. Kugeldreiecksrechnung (Sphärische Trigonometrie)
   A. Reine Mathematik - B. Aus der astronomischen Erdkunde
6. Achsen-Raumlehre (Analytische Geometrie)
   1. Gerade Linie - 2. Kreis - 3. Parabel - 4. Ellipse - 5. Hyperbel - 6. Ortsbestimmungen - 7. Allgemeine Gleichung 2. Grades mit 2 Veränderlichen

Viele Bereiche der Arithmetik sind weggefallen, die Zinsrechnung ist allerdings mit mehr Aufgaben vertreten. Diese Änderungen dürfen allerdings nicht unbedingt auf Veränderungen des in der Schulmathematik behandelten Stoffes zurückgeführt werden, schließlich bildete der zweite Doppelband ja nur eine Ergänzung zum ersten Doppelband. Allerdings schreibt MARTUS im Vorwort:

> „Dagegen waren die Gebiete der Achsen-Raumlehre und der Kugeldreiecksrechnung, welche den altsprachlichen Gymnasien seit 1892 erschlossen sind, reich auszustatten […].“[205]

So seien nun die Informationen zusammengefasst, die wir über den Stoff der mathematischen Reifeprüfungsaufgaben durch die Aufgabensammlungen von MARTUS zwischen 1865 und Beginn des 20. Jahrhunderts erhalten: Geometrie und Arithmetik waren die beiden Hauptthemengebiete, wobei das Gewicht bei der Geometrie lag. Anwendungsbezogene Aufgaben konnten vor allem in der Trigonometrie (Entfernungsberechnungen, oft in der Sphärischen Trigonometrie bezogen auf die Erdkugel) oder der Zinsrechnung gestellt werden. Physikalische Anwendungsaufgaben gab es vereinzelt auch. Wahrscheinlichkeitsrechnung war ein mögliches Prüfungsthema, aber nur in sehr geringen Maßen. Kegelschnitte waren als Teil der Geometrie beliebt. Im Bereich der Arithmetik wurden auch Diophantische Gleichungen behandelt, wobei diese eigentlich schon 1856/59 aus den Lehrplänen verschwanden (→*Kapitel 3.1.4*). Infinitesimalrechnung war noch kein Thema.

Nun sollen die Aufgaben selbst betrachtet werden. Der Umfang der Aufgabenstellung ist jeweils recht kurz und umfasst im Schnitt drei bis fünf Zeilen (bei geometrischen Konstruktionsangaben etwas mehr). Aufgabenunterteilungen gibt es nur selten, meistens wird nur *ein* Ergebnis verlangt. Ein großer Teil der Aufgaben ist als Frage formuliert, die auf eine konkrete Zahl als Ergebnis hinzielt (vgl. Aufgabentyp 1(a) in →*Kapitel 4.2.3*). Geometrische Konstruktionsaufgaben sind meist als Anweisungen formuliert („Man soll … finden.“). Bei

[205] H. MARTUS Bd. 2 (1901), S. IV.

Aufgaben der Gleichungslehre sind nur die nach *x* aufzulösenden Gleichungen angegeben, ohne eine ausformulierte Arbeitsanweisung.
Der didaktische Unterschied zwischen den rein mathematischen und den anwendugsbezogenen Aufgaben ist nicht groß: trotz der Verbindung mit außermathematischen Zusammenhängen (z. B. bei der Entfernungsberechnung) lässt sich die Lösung der Aufgabe mit rein mathematischen Verfahren bewältigen. Problemlöseverfahren, die auf außermathematische Problemstellungen angewendet werden müssen, werden hier nicht verlangt. Daher ist der vielfach verwendete Begriff der „eingekleideten Aufgabe“ sehr zutreffend. Damit wird der Aufgabe ein scheinbar außermathematischer Bezug gegeben, der aber genausogut verzichtbar wäre.
Zum Abschluss der Beschäftigung mit der MARTUSschen Aufgabensammlung möchte ich beispielhaft je eine arithmetische und eine geometrische Aufgabe samt Lösung aus dem zweiten Doppelband angeben. Innerhalb der Kapitel sind die Aufgaben nach Schwierigkeitsgraden geordnet; hier habe ich Aufgaben mittleren Schwierigkeitsgrades ausgewählt.
Geometrische Aufgabe, Nr. 1873 (Kapitel 4b. Mantel und Oberfläche eines geraden Kegels):

> „Ein gerader Cylinder und ein gerader Kegel haben die gemeinsame Achse *a* (etwa 5 cm) und gleichen Inhalt und gleiche Oberfläche. Man soll ihre Halbmesser berechnen und nach den Ausdrücken für die Durchmesser (ohne Klammern) ihre Achsenschnitte zeichnen.“[206]

Lösung:

> „Es ist der Halbmesser des Zylinders $x = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1)\,a$, des Kegels $y = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{3})\,a$. Beim Zeichnen nehme man für *a* eine große Strecke an, weil die Achsenschnitte auffallend schmal werden; denn es wird erst $2x + 2y = a$.“[207]

Es darf davon ausgegangen werden, dass die entsprechenden Volumen- und Oberflächenformeln für Zylinder und Kegel als bekannt vorausgesetzt sind. Dann lässt sich die Lösung durch Gleichsetzen der entsprechenden Formeln mit zwei Unbekannten recht leicht finden; im zweiten Schritt muss durch Einsetzen jeweils zu einer Unbekannten aufgelöst werden. Der einzige „Knackpunkt“ an der Aufgabe ist, dass bei der Verwendung der Formeln darauf geachtet wird, dass die beiden Halbmesser (Radien) von Zylinder und Kegel unterschiedlich sind. Zeichnungen hat MARTUS im Lösungsbuch nie abgedruckt, wohl aber – wie hier – Anmerkungen zu deren Anfertigung.
Somit fordert die Aufgabe zum einen die Fähigkeiten des Schülers im Umgang mit Formeln bzw. mit Gleichungen. Zum anderen wird das praktische Zeich-

206 H. MARTUS Bd. 3 (1901), S. 48.
207 H. MARTUS Bd. 4 (²1906), S. 67.

nen geübt. Damit wäre die Aufgabe – nach den Begriffen der heutigen Abituranforderungen – zum Anforderungsbereich I (bis II) zuzuordnen.

Arithmetische Aufgabe, Nr. 2376 (Kapitel 2b. Gleichungen dritten Grades: nur eine reelle Wurzel):

> „Für welchen Wert von x erreicht die Funktion $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 3x + 4$ einen kleinsten Wert?“[208]

Lösung:

> „Die einzige reelle Wurzel der Gleichung $x^3 - {}^1/_3 x - {}^2/_3 = 0$ ist $x = 1$. Die Funktion y hat also nur einen ausgezeichneten Wert. Sie wird für $x = 1$ $y_1 = 9$. Für benachbarte Werte, z. B. $x_2 = {}^3/_4$, kommt $y_2 = 9^{13}/_{36}$ und für $x_3 = 1^1/_2$ $y_3 = 9^{11}/_{18}$. Mithin ist $y_1 = 9$ wirklich ihr kleinster Wert.“[209]

Leider gibt MARTUS nicht an, auf welchem Wege er zu der Gleichung $x^3 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ gelangt; diese ist die mit Null gleichgesetzte Ableitungsfunktion der Ausgangsfunktion *y*. Die Durchsicht entsprechender Lehrbücher der Zeit sowie der benachbarten Aufgabenlösungen bei MARTUS lässt darauf schließen, dass der Begriff der Ableitung nicht bekannt ist, zumal erst um diese Zeit die ersten Diskussionen um die Einführung der Infinitesimalrechnung in der Schule geführt wurden. Es ist zu vermuten, dass die Gleichung z. B. mithilfe der damals beliebten Cardanischen Formeln berechnet wurde.

Auch sonst waren die Begrifflichkeiten und Methoden der heute standardmäßigen Kurvendiskussion wohl nicht bekannt. Die Überprüfung mittels benachbarter *x*-Werte könnte bei Überprüfung der zweiten Ableitung z. B. entfallen bzw. ohne die zweite Ableitung würde auch *ein* *x*-Wert zur Überprüfung der *y*-Werte außerhalb des Tiefpunktes genügen.

Interessant ist der Umgang mit reellen und v. a. komplexen Wurzeln, der sich in den benachbarten Aufgaben bei MARTUS noch viel deutlicher zeigt. Die Einschränkungen, die durch die fehlende Infinitesimalrechnung gegeben waren, führten offenbar zu einer stärkeren Arbeit mit komplexen Zahlen. So formulierte SIMON (²1908) in Anlehnung an Cardano:

> „‚Die Konsequenz für den Lehrplan heißt: entweder keine komplexen Zahlen, oder im Anschluß an die Gleichungen dritten Grades.‘ Fallen aber die komplexen Zahlen, so bleibt der Wunderbau der reinen Arithmetik Ruine. Die Gleichungen dritten Grades eröffnen ferner dem Schüler ein neues Aufgabengebiet, und zwar ein wichtiges, weil eine große Menge stereom. Aufgaben auf Gleichungen dritten Grades führt, und mit ihrer Beherrschung wird das Machtbewußtsein des Schülers wachsen.“[210]

---

208 H. MARTUS Bd. 3 (1901), S. 115.
209 H. MARTUS Bd. 4 (²1906), S. 147.
210 M. SIMON (²1908), S. 85.

Den Anforderungsgrad der Aufgabe betreffend kann die gleiche Aussage wie zur vorigen Aufgabe gemacht werden: Auch hier ging es vor allem um die rechnerische Umsetzung nach bekanntem Schema (Anforderungsbereich I).[211]

Diese beiden Beipsielaufgaben sollen genügen, um ein Bild damaliger Reifeprüfungsaufgaben zu zeichnen. Ihr Anspruch – v. a. an Fähigkeiten beim Rechnen – war nicht gering, doch ging er nicht weit über gelernte Muster hinaus. Die eigenständige Weiterentwicklung von Lösungsverfahren oder die Entwicklung zu konkreten Anwendungen passender Problemlösestrategien wurden nicht erfordert. Damit war das heute als Anforderungsbereich III bezeichnete Niveau nicht erreicht. Um die Begrifflichkeit von DAMEROW (→*Kapitel 2.1.1*) aufzugreifen, so war die Verbindung zwischen der Mathematik und ihrem Vorfeld noch nicht hergestellt.

3.2.2 Geometrische Aufgaben von LUDWIG und STELZIG 1930

Für die Zeit nach 1926, nachdem die sog. revidierten Meraner Lehrpläne erschienen waren, muss an dieser Stelle nicht so ausführlich auf Abituraufgaben aus Sammlungen eingegangen werden, da im folgenden Kapitel (→*Kapitel 4.* und →*Anhang 1*, ab C.1) genügend Beispiele für das Vollabitur dieser Zeit vorliegen. Daher möchte ich hier nur einen kurzen Blick in eine Sammlung von Aufgaben aus der darstellenden Geometrie von E. LUDWIG und H. STELZIG aus dem Jahr 1930 werfen,[212] die auch in der Schulbibliothek von Stift Keppel vorhanden ist. Die für die Reifeprüfung geeigneten Aufgaben sind dort jeweils mit einem „M“ gekennzeichnet.
Auch hier möchte ich eine Aufgabe auswählen und sie zunächst vorstellen. Aufgabe 7 aus dem Kapitel XX.B „Schnitt mit einer Zylinderfläche“:

> „Auf einem schiefen Zylinder, dessen Basis in Π_2 liegt und der durch die Basismittelpunkte $M_1(-4,0,4)$, $M_2(4.5,4,4)$ und den Radius $r = 3$ bestimmt ist, sind jene Punkte zu bestimmen, die von den Punkten $A(-4{\cdot}5,2,2{\cdot}5)$, $B(-1,5{\cdot}5,5)$, $C(2,4,1)$ gleichweit entfernt sind.“[213]

Leider gibt es keine Lösungen zu den Aufgaben, die uns mehr über die Lösungserwartung bzw. den Anforderungsgrad aussagen würden. Das Zeichen am Ende der Aufgabenstellung weist darauf hin, dass bei der Zeichnung das Blatt quer genommen werden soll.

211 Zur Frage, inwieweit die Prüfungsaufgaben zuvor im Unterricht behandelt wurden, siehe auch W. LIETZMANN (²1926), S. 208.
212 E. LUDWIG / H. STELZIG (1930).
213 Ebd., S. 46.

Diese Aufgabe steht im Zusammenhang mit dem großen Bereich der Kegelschnitte, der bereits seit 1856 wieder Bestandteil der Abituraufgaben war, heutzutage aber kaum noch eine Rolle in der Schulmathematik spielt.
Um hier zunächst auf die bereits im letzten Kapitel angeschnittene Aufgabenformulierung einzugehen, sei angemerkt, dass sowohl dieses Beispiel als auch fast alle übrigen Aufgaben der Sammlung nicht in Frageform formuliert sind, sondern eine klare Anweisung in Form einer Aussage (vgl. Aufgabentyp 2 in →*Kapitel 4.2.3*). Damit ist ein erster großer Unterschied zu der MARTUSschen Sammlung benannt: nicht mehr die Zahl als festes Ergebnis steht im Vordergrund der Aufgabenstellung, sondern die Lösung eines vielschichtigeren Problems, das mehr denn eine bloße Zahl zum Ergebnis hat. Doch auch hier ist dieser Schritt nicht ganz vollzogen; vielfach umgehen Formulierungen wie „Ermittle!“ oder „Bestimme!“ die Frage nach einem konkreten Ergebnis. Die Lösungsgänge werden jedoch komplexer.
Als zweites ist die verstärkte Tendenz bemerkbar, mathematische Zeichen zu verwenden. Die konkrete Benennung von Punktkoordinaten zeigt bspw. eine Wandlung vom formulierten Text hin zur mathematisch präziseren Ausdrucksweise.
Parallel dazu fällt auf, dass die anwendungsbezogenen, „eingekleideten“ Aufgaben fast völlig fehlen. Auch bei den kugelbezogenen Aufgaben fehlen jegliche geodätischen Anknüpfungspunkte, die etwa bei MARTUS in Form von Entfernungsbestimmungen auf der Erdkugel etc. einen Großteil der sphärischen Trigonometrie bilden.
Auch wenn die LUDWIG-STELZIGsche Sammlung nur einen gegenüber MARTUS vergleichsweise geringen Fundus an Aufgaben aus nur einem begrenzten Themengebiet liefert,[214] können gewisse Grundtendenzen herausgefiltert werden: Spezifizierung und Differenzierung der Aufgabenstellungen, Präzisierung und Formalisierung mathematischer Sachverhalte.

3.2.3 Abituraufgabensammlungen zwischen 1966 und 1987

Sowohl die Zeit der Neuen Mathematik wie auch die Umwandlungen durch die Einführung der differenzierten Oberstufe fallen in die Zeit, die mit den drei hier vorgestellten Abituraufgabensammlungen abgedeckt wird. Die Sammlungen

[214] Die Einführung und Behandlung der Infinitesmalrechnung konnte hieran gar nicht betrachtet werden; das wird in → *Kapitel 4.* anhand des konkreten Beispiels Stift Keppel nachgeholt.

von K. ARZT / N. KÖHNLEIN[215] und K. ULSHÖFER[216] stammen zwar aus Baden-Württemberg, dienen aber nicht minder der Veranschaulichung des Einflusses der Neuen Mathematik sowie den allgemeinen Veränderungen der Mathematikdidaktik. Dazu kommt eine Sammlung von Leistungskurs-Aufgaben der Jahre 1977 bis 1983 aus Nordrhein-Westfalen.[217]

Beginnen möchte ich mit der Betrachtung der Sammlung von ARZT/KÖHNLEIN, da sie die zeitlich frühesten Aufgaben enthält (ab 1966). Dem vorliegenden dritten Band waren zeitlich bereits zwei vorausgegangen, die aber hier nicht betrachtet werden sollen. Leider ist bei den einzelnen Aufgaben nicht vermerkt, aus welchem Jahr sie stammen; der Hauptteil der Aufgaben stammt aber aus der Zeit vor der Oberstufenreform, nur ein Teil der an den Versuchsschulen gestellten neuen Aufgaben wurde aufgenommen.[218] Es wurden Abituraufgaben des Gymnasiums und der technischen Oberschule mitsamt Lösungen aufgenommen. Sie sind nach Themengebieten geordnet:

<u>Reifeprüfungsaufgaben aus der Analysis</u>

1. Ganzrationale Funktionen
2. Gebrochenrationale Funktionen
3. Wurzelfunktionen
4. Transzendente Funktionen

<u>Reifeprüfungsaufgaben aus der Geometrie</u>

5. Kegelschnittaufgaben
6. Aus der Vektorrechnung
7. Affinitäten[219]

Das Thema Stochastik ist damit ausgeklammert. Im Vergleich zur heutigen Situation fallen besonders Unterschiede im Bereich der Geometrie auf. Während der hier mit „Aus der Vektorrechnung" überschriebene Bereich heute mit schwerpunktmäßiger Anwendung analytischer Methoden den wichtigsten Bereich der Geometrie umfasst, werden Kegelschnitte und Affinitäten heute kaum noch thematisiert. Im Bereich der Analysis mit der Kurvendiskussion verschiedener Arten von Funktionen und Funktionenscharen sind zur heutigen Situation kaum Veränderungen erkennbar.

Die abgedruckten Aufgaben sind jeweils in mehrere Teilaufgaben untergliedert. Im Bereich der Analysis betreffen die ersten ein bis zwei Teilaufgaben in der Regel die Kurvendiskussion samt Zeichnung der Funktion. Die weiteren Teilaufgaben umfassen Integral- und Flächenberechnungen, Approximationsfunktionen, Abbildungsgleichungen etc. Die geometrischen Aufgaben sind in

---

215 K. ARZT / N. KÖHNLEIN (1974).

216 K. ULSHÖFER ([4]1987).

217 H. J. WAGNER (1983).

218 K. ARZT / N. KÖHNLEIN (1974), S. 5.

219 Nach dem Inhaltsverzeichnis bei ebd., S. [3].

ihrem Aufbau meist nicht so festgelegt; hier geht es i. A. um Schnittmengenberechnungen, Geraden- und Ebenenbestimmungen, Abstands- und Volumenangaben etc. Im Bereich der Affinitäten werden natürlich auch Matrizen thematisiert – ein Begriff, der mir in meiner eigenen Schulzeit gar kein Begriff mehr war.

Jedem Kapitel sind Musteraufgaben mit ausführlichen Lösungen vorangestellt; die Lösungen umfassen sowohl mathematisch-technische Berechnungen (ohne Nebenrechnung) wie auch erläuternde Textteile. Die Lösungen zu den übrigen Aufgaben sind nur mit den jeweiligen Endergebnissen am Ende des Buches vermerkt.

Die Angaben sind sehr präzise. Funktionen werden bspw. nicht mehr bloß als Gleichung der Form „$y = \ldots$" angegeben (wie etwa bei MARTUS, Aufgabe 2376, → *Kapitel 3.2.2*), sondern als Abbildung von x auf den Funktionswert aufgefasst (z. B. $f\colon x \mapsto (1-x)e^x$, oder $f\colon x \mapsto f(x)$ mit $f(x) = (1-x)e^x$). Die Definitionsmengen werden i. d. R. ebenfalls benannt (z. B. $x \in \mathbb{R}$). In der Geometrie werden Punkte stets in Verbindung mit einem „Punktnamen" genannt (z. B. $A(2|1|0)$ anstatt $(2|1|0)$) – in Verbindung mit der gestärkten Bedeutung der vektoriellen Geometrie. Die Vektoren werden entweder mit Vektorpfeil bezeichnet oder in deutscher Schrift dargestellt ($\vec{a}$ oder a[220]).

Bei der Durchsicht der Sammlung findet sich keine einzige anwendungsbezogene Aufgabe oder eine Aufgabe, die von den oben beschriebenen Standardschemata bedeutend abweichen würde. Damit ergibt sich ein sehr homogenes Bild von mathematischer Exaktheit aber wenig-inspirierender Einseitigkeit. Dazu meinen die Autoren im Vorwort:

> „Die Aufgaben geben viele Beispiele, wie weit doch auch Können, Wissen und Verstehen wesentliche Lernziele der etwas in Verruf geratenen ‚Aufgabenmathematik' sind."[221]

Dem Band von K. ULSHÖFER soll nun die Aufmerksamkeit gelten. Er umfasst alle in Baden-Württemberg zentral gestellten Abituraufgaben zwischen 1974 und 1987 und stellt somit sozusagen die Fortsetzung des ARZT/KÖHNLEIN-schen Buches dar. Im Unterschied dazu werden die Aufgaben hier allerdings ab 1982 den Jahren zugeordnet; für die vorigen Jahre wurde die Aufteilung in Analysis- und Geometrie-Aufgaben übernommen. Der Band enthält 42 Aufgaben zur Analysis, 33 zur Analytischen Geometrie (Lineare Algebra) und 12 zur

---

220 K. ARZT / N. KÖHNLEIN (1974), verwenden deutsche Schreibschrift. Diese befindet sich nicht in meinem Zeichensatz. Daher verwende ich hier – wie es auch in anderen Veröffentlichungen angewendet wurde – deutsche Druckschriftbuchstaben.

221 Ebd., S. 5.

Stochastik (Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik) – jeweils für Grundkursprüfungen.[222] Aus dem neuen Bereich der Stochastik sind seit 1984 Aufgaben gestellt worden.[223] Jeder Aufgabe ist eine ausführliche Lösung angehängt.

Im Vorwort bemerkt ULSHÖFER, die Aufgaben seien größtenteils durch vom Unterricht her bekannte Standardverfahren lösbar; bei weiteren Einzelfragen sei darüberhinaus kreatives Denken erforderlich (vgl. Anforderungsbereich III). Er beklagt die knappe Unterrichtszeit der Oberstufe als ein ernstes Problem, das nicht immer die Möglichkeit gibt, die im Unterricht erarbeiteten Methoden zu vertiefen.[224] Das geht aber letztendlich zu Lasten eines einordnenden Überblickwissens, das dem Schüler nachträglich Zusammenhänge eröffnet und ihn somit zum eigenständigen Entwickeln neuer Verfahren befähigt. Diese Diskussion weiterzuführen ist an anderer Stelle angebrachter (→ *Kapitel 5.*). Hier soll vielmehr auf die Aufgaben selber eingegangen werden.

Was den Aufbau der Aufgabenstellungen bis 1981 betrifft, kann auf die Bemerkungen zur Sammlung von ARZT/KÖHNLEIN verwiesen werden. Aufgaben zu Kegelschnitten gibt es keine; affine Abbildungen werden nur noch bis 1978 behandelt.[225] Im Bereich der transzendenten Funktionen wurden seit 1979 die Winkelfunktionen durch die Exponentialfunktion ersetzt.[226]

Grundsätzliche Änderungen sind den Aufgaben nach 1982 nicht anzumerken. Jetzt werden in den Analysis-Aufgaben jedoch gerne vermehrt Anwendungsbezüge hergestellt, z. B. zur Insekten-Population[227] oder in Verbindung mit Bakterien-Kulturen[228]. Bei den stochastischen Aufgaben ist ein Anwendungsbezug ohnehin naheliegend. Der Aufbau der geometrischen Aufgaben vereinheitlicht sich – das mag einerseits am Wegfall der Kegelschnitte und der affinen Abbildungen liegen, andererseits an einer stärker analytischen Behandlung des Stoffes.

Im Vergleich zur Sammlung von ARZT/KÖHNLEIN wählt ULSHÖFER (bei den Lösungen) eine weniger streng mathematische Ausdrucksweise. Quantorenausdrücke fallen bspw. weg. Auch scheint (sowohl in den Lösungen wie bei den Aufgabenstellungen) der Abbildungsgedanke der Funktion nicht

[222] K. ULSHÖFER (^{4}1987), S. 3.
[223] Vgl. ebd., S. 103. Der Lehrer konnte entsprechend des vorher im Unterricht behandelten Themas zwischen Stochastik- und Linearer Algebra/Analytischer Geometrie-Aufgabe wählen (betr. Grundkurs Baden-Württemberg!).
[224] Vgl. ebd., S. 5f.
[225] Vgl. ebd., S. 81.
[226] Vgl. ebd., S. 23.
[227] Vgl. ebd., S. 131.
[228] Vgl. ebd., S. 154f u. a.

mehr so bedeutend zu sein, so fällt die Angabe „$f\colon\ x \mapsto f(x)$" vor der Funktionsdefinition weg. Dies mag – im Zusammenhang mit dem Wegfall der affinen Abbildungen betrachtet – ein Zeichen dafür sein, dass der Abbildungsgedanke, der in enger Verbindung mit der Mengenlehre der Neuen Mathematik stand, inzwischen an Bedeutung verloren hat und sich eine „liberalere" Ausdrucksweise durchsetzt, die weniger auf Präzision als mehr auf Verständnis setzt.

Ein weniger einheitliches Bild als die beiden vorigen Bücher bietet die Sammlung von NRW-Leistungskurs-Aufgaben, 1983 herausgegeben von H. J. WAGNER. Da in NRW, anders als in Baden-Württemberg, keine zentralen Abituraufgaben gestellt werden, tragen die hier veröffentlichten Aufgaben noch viel mehr die individuelle Handschrift der einzelnen Lehrer, deren Namen WAGNER auch zu jeder Aufgabe nennt (H. Graff, C. Alertz, I. Holtgräwe, F. Esser, W. Felsch, G. Bragard und N. Therstappen). Besonders fällt die erste Abiturarbeit (von 1977) aus dem Rahmen:

> „1. Untersuchen Sie allgemein die Bedeutung der Stetigkeit einer Funktion für die Differenzierbarkeit einer Funktion.
> 2. Gegeben sei die Funktion $y = x^2 \ln x$.
>   a) Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie den Graph.
>   b) Bestimmen Sie die Maßzahl der Fläche, die von der x-Achse und vom Graph der Funktion begrenzt wird.
> 3. Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 in $\mathbb{R}_3$.
>   a) Weisen Sie vektoriell nach, daß die beiden Geraden sich schneiden.
>   b) Bestimmen Sie vektoriell den Abstand des Punktes P_1 von der Geraden, die im Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden auf diesen senkrecht steht.
>
>   Begründen Sie die benutzten Vektorbedingungen und überprüfen Sie die erhaltenen Ergebnisse!
>
> $g_1\colon \mathrm{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix};\quad g_2\colon \mathrm{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix};\quad P_1(2|3|1).$"[229]

Die Aufgabenstellungen sind knapp und sehr frei gehalten. Besonders die erste Aufgabe lässt sehr unterschiedliche Ausführungen zu; sie entspricht der in den Richtlinien von 1963 geäußerten Form des „Themas in Aufsatzform". Leider gibt WAGNER nicht, an welche Vorbedingungen die Schüler hatten, die diese Aufgabe lösten. In seinem Lösungsweg definiert er zunächst die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit und stellt dann fest (u. a. durch Verwendung des Beispiels $y = |x|$), dass die Stetigkeit einer Funktion für die Differenzierbarkeit notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung ist.

Die zweite Aufgabenstellung ist sehr standardmäßig (Kurvendiskussion, Zeichnung, Flächenberechnung), ebenso wie die dritte Aufgabe. Unter heuti-

229 H. J. WAGNER (1983), S. 1. Aufgabenstellung: H. Graff (Abitur 1977).

gen Bedingungen würde ein solcher Vorschlag sicherlich nicht mehr zugelassen.

Ein anderes Abiturarbeitsbeispiel (von 1983) sei zum Vergleich gegeben:

„1. Gegeben ist die Funktionenschar $\{f_k \mid k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ durch $f_k(x) = k\,\frac{x^2+2x}{(x-1)^2}$.

a) Geben Sie den größten Definitionsbereich $D_k \subset \mathbb{R}$ von f_k an, bestimmen Sie dann Nullstellen, Extrema, Unstetigkeitsstellen und Asymptoten von f_k. Wodurch unterscheiden sich f_k und f_{-k}? Skizzieren Sie f_1.

b) Bestimmen Sie $k = k_1$ so, daß das Minimum von f_{k_1} bei $(x_m|-1)$ liegt. Welchen Schnittwinkel schließt mit der y-Achse ein? (ersatzweise $k_1 = 2$)

c) Berechnen Sie den von f_k und der x-Achse eingeschlossenen endlichen Flächeninhalt A_k. Für welches k wird $A_k = 1$? Ist die Lösung eindeutig? Besitzt die Fläche, die durch die Graphen zu f_1, $y = 1$, $x = 3$ beschrieben wird und sich ins Unendliche erstreckt, eine endliche Maßzahl?

d) Bestimmen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen zu f_1 und $y = mx$. Für welche $m \in \mathbb{R}$ ist die Menge der Schnittpunkte einelementig, zweielementig, dreielementig? Skizzen!

2. Gegeben sind die Punkte P_0, P_1, P_2 durch ihre Ortsvektoren

$$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a) Welchen Abstand hat die Ebene, die von P_0, P_1, P_2 aufgespannt wird, zum Nullpunkt?

b) Berechnen Sie zwei Seitenlängen und einen Innenwinkel des Dreiecks $P_0P_1P_2$. Um was für ein Dreieck handelt es sich?

c) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g, die senkrecht zu der Ebene ε, die von P_0, P_1, P_2 aufgespannt wird, steht und durch den Schwerpunkt des Dreiecks $P_0P_1P_2$ verläuft. Zeigen Sie, daß g durch den Ursprung des Koordinatensystems geht.

d) Ermitteln Sie die Durchstoßpunkte P_3, P_4 von g durch die Kugel K: $x^2 = 18$. Zeigen Sie, daß einer dieser Punkte P_0, P_1, P_2 die Eckpunkte eines regelmäßigen Tetraeders bilden (ersatzweise $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$).

3. Gegeben ist der lineare Raum $\mathcal{C}[-1,1]$ der auf $[-1,1]$ stetigen Funktionen mit dem Skalarprodukt

$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$ und der Norm $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Sei P_2 der lineare Unterraum, der die Polynome höchstens zweiten Grades enthält. Als orthonormale Basis von P_2 sind die Legendre Polynome g_0, g_1, g_2 gegeben:

$g_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $g_1(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}x$; $g_2(x) = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)$.

a) Stellen Sie f_1, $f_1(x) = x^2 + 2x + 3$ dar als Linearkombination der Basiselemente. Geben Sie ein $f_1 \in P_2$ an, welches orthogonal zu f_1 ist.

b) Bestimmen Sie zu f_2, $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ das Element bester Approximation f_2^* aus P_2. Wie groß ist der Fehler $\|f_2 - f_2^*\|$?

c) Wie groß ist die Abweichung $|f_2(x) - f_2^*(x)|$ höchstens, wenn $f_2^*(x) = \frac{9}{7}x$ ist? Wo schneiden sich die Graphen von f_2 und f_2^*? Skizze!

d) Zeigen Sie, daß $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $g_k(x) = x^k$ in $\mathcal{C}[-1,1]$ eine Nullfolge ist, also $\lim\limits_{k\to\infty}\| g_k \| = 0$. Gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$? Deuten Sie dieses Ergebnis!“[230]

Schon rein äußerlich sieht man dieser Aufgabe gegenüber der zuvor zitierten einen deutlich größeren Umfang an. Auch die Differenzierung innerhalb der Aufgabenstellungen und der Anforderungen ist deutlich breiter gefächert. Während in der zweiten Aufgabe von 1977 eine relativ einfache Logarithmusfunktion zu bearbeiten ist, so ist es hier in der ersten Aufgabe eine gebrochen rationale Funktionenschar. Zu dieser ist die übliche Kurvendiskussion durchzuführen (samt Zeichnung), auch eine Flächenberechnung wird gefordert, darüberhinaus sind aber etliche weitere Anforderungen gestellt, die den Anforderungsbereichen II und III zuzurechnen sind. Besonders die dritte Aufgabe erfordert die Anwendung bekannter Verfahren der Analysis auf neue Zusammenhänge (natürlich immer unter der Annahme, dass genau gleichartige Aufgaben im Unterricht vorher nicht behandelt wurden).

Auch die Ausdrucksweise ist wesentlich formeller als in der Aufgabe von 1977. Interessant ist z. B. die Angabe der Funktionenschar in Mengenschreibweise $\{f_k \mid k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ (Aufgabe 1) – sicherlich eine Ausdrucksweise im Geiste der Neuen Mathematik. Auch die Formulierungen in der dritten Aufgabe „Stellen Sie $\boldsymbol{f_1}$, $f_1(x) = x^2 + 2x + 3$ dar …“ anstatt „Stellen Sie $f_1(x) = x^2 + 2x + 3$ dar …“ zeugt von dem Bemühen um eine möglichst mathematisch exakte Darstellung. In gleicher Weise ist die Bezeichnung $\mathcal{C}[-1,1]$ zu werten, die auch für Schüler einfacher nur als „lin. Raum der auf [–1,1] stetigen Funktionen“ hätte bezeichnet werden können. Darüberhinaus ist auch die Einführung von „Räumen“ und „Unterräumen“ eine mathematische Thematik, die von den Schülern erst einmal verstanden werden muss.

Bei einem abschließenden Überblick über die gesamte Sammlung von WAGNER fällt abermals das Fehlen anwendungsbezogener Aufgaben auf; als solche können nur die Stochastikaufgaben gezählt werden, zu denen jene typischen Muster wie Münzwurf oder Kugeln in Urnen zählen.

Mit diesem kurzen Blick auf die drei vorliegenden Aufgabensammlungen der 1960er bis 1980er Jahre wird eine deutliche Entwicklung gegenüber den früheren Aufgabensammlungen deutlich, die sich in mathematischer Präzisierung sowie inhaltlicher und methodischer Differenzierung und Erweiterung

230 H. J. WAGNER (1983), S. 58f. Aufgabenstellung: G. Bragard und N. Therstappen (Abitur 1983).

ausdrückt. Daneben sind aber auch thematische Verschiebungen festzustellen, die die Geometrie stark reduzierten zugunsten einer deutlichen Betonung analytischer Verfahren, ergänzt durch die Stochastik als neues drittes Hauptthemengebiet. Die Art der Aufgabenstellung wird zwar zum einen stärker binnendifferenziert, dagegen bilden sich aber auch hier neue feste Muster in der Art der Aufgabenstellung (z. B. die fast zwingende Kurvendiskussion nach üblichem Schema). Bis zu dem Zeitpunkt, den uns diese Aufgabensammlungen vorgeben, ist eine deutliche, fast komplette Abkehr von anwendungsbezogenen Fragestellungen festzustellen.

Innerhalb der drei Sammlungen ist eine starke Tendenz zu mathematischer Exaktheit zu bemerken, die auch innerhalb der abgedeckten ca. 20 Jahre zunimmt. Durch den Vergleich zwischen den Zentralabituraufgaben Baden-Württembergs und den individuellen Aufgabestellungen Nordrhein-Westfalens wird nebenbei deutlich, dass durch letzteres eine größere Streuung der Ideen, aber auch der Anforderungen erreicht wird – einerseits eine zu begrüßende Vielfalt, andererseits aber auch die Gefährdung der Vergleichbarkeit. Eine (mögliche) Fortsetzung dieser Entwicklungen wird am Ende der Arbeit diskutiert (→ *Kapitel 5.2.*).

4. Mathematik im Abitur am Gymnasium Stift Keppel

Die in den vorigen Kapiteln dargestellte allgemeine Entwicklung des Abiturs im Fach Mathematik möchte ich hier nun an einem konkreten Beispiel veranschaulichen. Es gibt nur wenige Schulen, die über ein Archiv verfügen, das weit über hundert Jahre zurückreicht. Einerseits besteht laut AschO § 24 (2) nur die Pflicht, Prüfungsarbeiten zehn Jahre lang aufzubewahren.[231] Andererseits verfügen nur wenige Schulen über genügend Raum für ein umfassendes Schularchiv.

Das heutige Gymnasium Stift Keppel in Hilchenbach hat ausreichend Raum, so dass ein solches Archiv angelegt werden konnte. So bietet sich hier der glückliche Umstand, dass im Schularchiv die Abschlussprüfungsarbeiten seit dem Jahr 1894 bis heute nahezu vollständig erhalten sind. Damit hatte ich die Möglichkeit, im Rahmen dieser Arbeit das vorhandene Archivmaterial zu sichten, auszuwerten und in Beziehung zu den in →*Kapitel 2. und 3.* dargestellten allgemeinen Entwicklungen zu setzen (→*Kapitel 5.*).

Dabei werde ich im Folgenden auf die Besonderheiten, die im Bezug auf die Schulformen von Stift Keppel zu beachten sind, näher eingehen. Außerdem werden sich die nachfolgenden Kapitel – anders als die vorangegangenen – nur auf den Zeitraum der letzten ca. hundert Jahre beschränken, da für Stift Keppel aus früherer Zeit keine konkreten Materialien zur Verfügung stehen (vor 1913 wurde in Stift Keppel kein Abitur, vor 1894 überhaupt kein anderer Abschluss vergeben).

4.1. Schulische Voraussetzungen

Bei der Betrachtung konkreter Beispiele – wie hier für Stift Keppel – ergeben sich immer Besonderheiten, die vom Durchschnitt abweichende Ergebnisse liefern, die es zu begründen gilt. Gerade im Bezug auf Stift Keppel ist der Begriff „Abitur“ mit Vorsicht zu behandeln, da seine Vergangenheit als Mädchenschule teilweise Einschränkungen gegenüber dem „Vollabitur“ der Jungenschulen mit sich brachte. Hier gilt es, die verschiedenen Schulformen und Arten des Abiturs sorgfältig zu beachten, um nicht zu falschen Schlussfolgerungen zu gelangen. Daher möchte ich im Folgenden zunächst die genaueren schulischen Umstände Stift Keppels erläutern, um bei der Auswertung der Arbeiten darauf Bezug nehmen zu können.

[231] In dem seit 2005 für NRW geltenden Schulgesetz (NRW-SchulG) konnte ich keinen entsprechenden Paragraphen finden.

4.1.1 Schulgeschichtlicher Rahmen – von der Höheren Töchterschule zum Öffentlichen Gymnasium für Mädchen und Jungen

Stift Keppel, heute zur politischen Gemeinde Hilchenbach gehörig, wurde als Prämontratenserinnenkloster vor 1239 gegründet. Nach Einführung der Reformation (1538) diente es als freiweltliches Damenstift für Siegerländer Adelstöchter. Über frühere Formen schulischen Unterrichts seit dem 16. Jahrhunderts kann an anderer Stelle nachgelesen werden.[232]

Die für die vorliegende Arbeit relevante Schulgeschichte beginnt mit dem Jahr 1871.[233] In jenem Jahr wurde in den altehrwürdigen Gebäuden „mittels Allerhöchsten Erlasses“[234] der preußischen Königin Elisabeth eine Höhere Töchterschule mit Internat eröffnet. Diese Schulform lässt sich nur schwer dem heutigen Schulsystem einordnen, sie gehörte nicht zu den „höheren Lehranstalten“ wie etwa die Gymnasien. Daher konnten die Absolventinnen auch keinerlei Abschlüsse – etwa ein Abitur – erwerben. Im Vordergrund standen hausfrauliche Tugenden, wie z. B. Handarbeit. Zu Anfang gab es noch keine verbindlichen Lehrpläne; im Eröffnungsprospekt der Schule heißt es:

> „Unterrichtsgegenstände sind außer den Elementarfächern: Religion, deutsche Literatur, französische und englische Sprache, Geschichte, Geographie, Naturlehre, Zeichnen, Handarbeit, Gesang und Musik.“[235]

Zu den Elementarfächern zählten Lesen, Schreiben und Rechnen. Mathematik im weiterführenden Sinne wurde also nicht angeboten.[236]

Die seit dem zweiten Jahr eingerichtete Sonderklasse „Selecta“ diente der Ausbildung von Lehrerinnen. Die Ausbildungsdauer betrug ein, später zwei Jahre. Für die Abschlussprüfung mussten die Kandidatinnen 18 Jahre alt sein. Aber auch diese Prüfung war einem Abitur nicht vergleichbar.

Die Auswirkungen der ersten Mädchenschulreform 1894, die die „Anerkennung der öffentl. höh. Mädchenschule als höh. Unterrichtsanstalt“[237] forderte, waren auch in Keppel spürbar: es wurden nun sieben Töchterschulklassen eingerichtet, die Lehrerinnenausbildung am Seminar wurde auf drei Jahre erweitert, ein fester Lehrplan wurde aufgestellt und die lokale Schulaufsicht wur-

---

232 Dazu sei verwiesen auf E. ISENBERG (1989).

233 Als Quellen für die Schulgeschichte ab 1871 dienten D. JEHMLICH (1992) sowie die Aufsätze von Dorothea Jehmlich, Elli Wunderlich und Horst Wunderlich in 750 Jahre Stift Keppel (1989).

234 Aus der Bestallungsurkunde der ersten Oberin Nanny von Monbart (10.08.1871), zit. nach D. JEHMLICH (1989), S. 139.

235 W. HARTNACK / J. FREIIN VON BREDOW (1941), S. 43f.

236 Vgl. D. JEHMLICH (1989), S. 145.

237 Korrespondenz-Blatt für die Philologen-Vereine Preußens, 1894 Nr. 24, S. [133]. Online unter: http://www.bbf.dipf.de/cgi-shl/digibert.pl?id=BBF0615856 (02.03.2006).

de durch die Provinzialschulbehörde Münster abgelöst. Die seminaristische Lehrerinnenausbildung schloss mit einer Prüfung ab, in der auch Arbeiten im Fach Mathematik geschrieben wurden.

Für den naturwissenschaftlichen Unterricht waren bis jetzt die Stiftsoberin und der Stiftspfarrer zuständig, teilweise wurde er auch vom Hilchenbacher Pfarrer oder dem dortigen Seminardirektor erteilt – also akademisch ausgebildeten Leuten. Diese weitgehende Beschränkung auf männliche Lehrer sollte sich mit der zweiten Mädchenschulreform von 1908 ändern.

Diese bewirkte die Umgestaltung der Anstalt in ein Lyzeum mit Oberlyzeum. 1910 folgte die Anerkennung als „öffentliche höhere Schule“, das bedeutete nun eine Zuordnung zum gymnasialen Bereich. Das Lyzeum umfasste nun 7 Schuljahre; das sog. Oberlyzeum (der „Oberstufe“) diente der höheren Mädchenschulbildung. In der Wirklichkeit sah es aber zunächst so aus, dass das Oberlyzeum in eine zweijährige Frauenschule und das „höhere Lehrerinnenseminar“ aufgeteilt war. Nach drei Jahren Oberstufenunterricht konnte nun erstmals das Abitur erreicht werden – es eröffnete allerdings zunächst nur den Weg in die Lehrerinnenausbildung, die in der Seminarklasse am Ort erfolgte. Zum Studium berechtigte das „Mädchenabitur“ weiterhin nicht, wobei es einen Ausweg gab, denn nach zwei Jahren Lehrtätigkeit durften auch junge Damen studieren, allerdings nur philologische Fächer.

Doch die schrittweise Aufwertung des Abiturs am Oberlyzeum war nicht mehr aufzuhalten: ab 1913 berechtigte es auch ohne Seminarplan und anschließende zweijährige Berufspraxis zum Vollstudium (allerdings mussten die Mädchen zuvor eine Zusatzprüfung ablegen).

1923 wurde das Mädchenschulwesen abermals reformiert. Nun endlich hatte das Mädchenabitur seine volle Anerkennung erlangt und erlaubte den freien Zugang zu den Universitäten. Die Seminarklasse wurde aufgelöst, die Lehrerinnenausbildung war nun Sache der Hochschulen. 1926 fand in Keppel das erste „richtige“ Abitur statt. Dennoch schien folgender Zusatzvermerk in den Reifezeugnissen notwendig zu sein: „Vorstehendes Zeugnis wird als Gleichberechtigt dem Reifezeugnis einer Studienanstalt mit Kursen der Oberrealschulrichtung anerkannt.“

Rückgängige Schülerinnenzahlen infolge der Weltwirtschaftskrise führten in Stift Keppel zu Diskussionen um die Einführung einer Frauenoberschule, die die bisherige neusprachliche Oberstufe ersetzen sollte. Um die Oberstufe überhaupt zu retten, war man sogar bereit, auf die gerade erreichten Möglichkeiten des Vollabiturs zu verzichten: Die Frauenoberschule mit hauswirtschaft-

lichen Abschlussprüfungen vergab nach der Umwandlung der Obersekunda zur Frauenoberschulklasse 1934 nur mehr ein eingeschränktes Abitur. Ein Universitätsstudium war nur noch mit Zusatzprüfung zu erlangen. Darin zeigt sich die Bekämpfung des „Intellektualismus“ des NS-Regimes, das sich in seiner Bildungspolitik ganz der Volksbildung zuwandte. Das erste Abitur der Frauuenoberschule 1937 zeigt in seinen Aufgaben eine deutliche Hinwendung zu NS-Mutterschaftsideologie[238] und hauswirtschaftlicher Thematik. Es gab kein schriftliches Abitur in Mathematik, nur in den Fächern deutscher Aufsatz, Geschichte, Naturwissenschaften und Biologie. Auch Englisch (die einzig verbleibende Fremdsprache) wurde im Abitur nicht geprüft. Immerhin fanden noch mündliche Prüfungen im Fach „Rechnen (Mathematik) und Buchführung“ statt.
Im Jahre 1941 wurde das „Frauenabitur“ voll anerkannt. Dies war aber eigentlich nicht so sehr ein bewusster Akt der Gleichberechtigung, sondern eher ein weiterer Beleg für die Bildungsfeindlichkeit des NS-Regimes. Im Frühjahr 1944 fand das letzte „normale“ Abitur statt. Im Herbst 1944 wurde der nächste Jahrgang mit dem „Notabitur“ entlassen. Der Unterricht fand nur noch im Keller statt. Bald wurde der Schulunterricht ganz eingestellt.
Nach dem Krieg konnte der Unterricht im Januar 1946 wieder aufgenommen werden. Nun kehrte man zur neusprachlichen Oberstufe zurück, das Abitur der Frauenoberschule war wieder abgeschafft. Damit war die Gleichberechtigung mit den Jungenschulen zum zweiten Mal erreicht und sollte auch nicht wieder verlorengehen. Das erste wiedererlangte Vollabitur fand 1949 statt.
In den Folgejahrzehnten konnte die Schule gute Zuwächse verzeichnen, so dass die Schulgebäude 1956-63 und 1970/71 mehrfach erweitert werden mussten. Anfang der 1980er Jahre verließen die letzten Internatsschülerinnen das Stift.
Auf Wunsch vieler Eltern erfolgte 1964 zusätzlich zum neusprachlichen Zweig die Einrichtung eines Frauenzweiges mit eingeschränktem Abitur. 1969 wurde außerdem ein pädagogisch-musischer Zweig in Koedukation eröffnet. Mit der Einführung der reformierten Oberstufe 1974/75 waren diese Bestrebungen aber nicht von langer Dauer. Das erste Abitur nach dem neuen Kurssystem fand 1977 statt. Den letzten wichtigen Einschnitt in der Schulgeschichte des Stiftes Keppel stellt die Einführung der uneingeschränkten Koedukation im Jahr 1977 dar. Seitdem ist Stift Keppel ein „öffentliches Gymnasium für Mädchen und Jungen“.

[238] Adolf Hitler: „Das Ziel der weiblichen Erziehung hat unverrückbar die kommende Mutter zu sein“. In: Deutsche Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung, 5.2.1938, S. 51. Zit nach D. JEHMLICH (1992), S. 95. ◊ Vgl. dazu auch W. NYSSEN (1979), S. 90.

4.1.2 Exkurs: Mathematik im Abitur des höheren Mädchenschulwesens

Was heute als selbstverständlich erscheint – das Abitur für Mädchen – war bis vor hundert Jahren noch keine Selbstverständlichkeit. Bis in die 1970er Jahre hinein gab es – so auch in Stift Keppel – Abiturabschlüsse für Mädchen, die nur eine eingeschränkte Zulassung zum Hochschulstudium boten.
Die ersten Abiturientinnen des Jahres 1894/95 konnten ihren Abschluss nur unter erschwerten Bedingungen – Gasthörerstatus, private Gymnasialkurse etc. – erlangen.[239] Noch mehr als ein weiteres Jahrzehnt sollte es dauern, bis Preußen mit der zweiten Mädchenschulreform von 1908 die reguläre Möglichkeit des Abiturs für Mädchen erreichte. Doch auch dieses Abitur berechtigte zunächst nur in eingeschränktem Maße zu Hochschulstudium.
In den vorangegangenen Kapiteln wurden die Entwicklungen des Abiturs und des Mathematikunterrichts nur für das höhere Schulwesen für Jungen dargestellt. Ein Grund dafür ist, dass eine entsprechende Entwicklung im höheren Mädchenschulwesen erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts einsetzt, und dass nach dem Zweiten Weltkrieg im Wesentlichen keine Unterschiede mehr zwischen der Behandlung beider Geschlechter betr. Mathematik im Abitur gemacht werden können. D. h. eine „Zweigleisigkeit“ ist nur etwa über einen Zeitraum von knapp fünzig Jahren zu verzeichnen. Ein unterschiedliches Anspruchsniveau ist dabei der Hauptunterschied zwischen beiden Schulformen, so dass keine grundlegenden didaktischen Divergenzen zu erwarten sind.
Dennoch möchte ich das Thema der Mathematik im höheren Mädchenschulwesen hier kurz anreißen, da es sich bei dem hiesigen Fallbeispiel Stift Keppel um eine eben solche höhere Mädchenschule handelt. Eine getrennte Betrachtung der Mathematik im Mädchenschulwesen scheint konkret zwischen 1913 und 1925 sowie zwischen 1937 und 1940 interessant, da in diesen Jahren kein „Vollabitur“ in Stift Keppel vergeben wurde.
Das Hauptargument, das für Unterschiede in der Behandlung von Mädchen und Jungen im Bezug auf den Mathematikunterricht vorgebracht wurde, ist mit einer Aussage H. Betrams von 1881 trefflich umrissen:

> „Da indessen im allgemeinen der Beruf der Frauen nicht auf die Quellen des Wissens […], sondern auf ihre Verwendung für das Gefühlsleben der Individuen gerichtet ist, so wird die Beschäftigung mit der Math. nur ausnahmsweise dem weiblichen Sinn entsprechen.“[240]

Doch schon 1908 stellt SIMON diese Kategorisierung in Frage und meint, dass „die ganze Entwicklung der Frauenfrage mit absoluter Notwendigkeit auf die

239 A. WOLTER (1989), S. 33. ◊ L. WIESE (1902), S. 105.
240 Zit. bei M. SIMON (²1908), S. 50.

Einführung der Math. in den Lehrplan der höheren Töchterschule“ dränge.[241] Und 1926 stellt LIETZMANN fest:

> „Obwohl der körperliche und geistige Entwicklungsgang des Knaben und des Mädchens verschieden zu sein scheint, obwohl gerade für die mathematische Beanlagung das Vorhandensein solcher Unterschiede behauptet und vielfach bestätigt worden ist, kann heute von einer eigentlichen Mädchenschulpädagogik in der Mathematik kaum noch die Rede sein. Jedenfalls ist der Einfluß auf die Lehrplangestaltung – und man kann hinzufügen auf die Lehrbücher – kaum nachweisbar.“[242]

Sah der Lehrplan für das höhere Mädchenschulwesen zunächst nur das Fach „Rechnen“ vor, um die Schülerinnen in den „Anwendungen auf die gewöhnlichen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens, namentlich auf dem Gebiete der Hauswirtschaft, des Spar- und Versicherungswesens, der einfachen Vermögensverwaltung“[243] zu üben, so hielt bald auch die höhere Mathematik Einzug in den Unterricht für Mädchen. Der Lehrplan sah dazu vor:

> „I. Arithmethik: Die vier Grundrechnungsarten. Zerlegung in Faktoren. Proportionen, Potenzen und Wurzeln. Gleichungen 1. Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Einfache quadratische Gleichungen. Zahlreiche angewandte Gleichungen.
> II. Planimetrie: Die Lehre von den Geraden, Winkeln, Dreiecken, Parallelogrammen. Das wichtigste aus der Kreislehre. Die Lehre von der Gleichheit und Ähnlichkeit der Figuren. Ausmessung der Fläche gradliniger Figuren. Ausmessung des Kreises. Konstruktions- und Verwandlungsaufgaben.
> III. Stereometrie: Propädeutischer Kursus über die einfachen Körper. Berechnungen von Oberflächen und Inhalten.“[244]

In der Lehrerinnenbildung, wie sie bis 1912 in Stift Keppel erteilt wurde, stand allerdings weiterhin nur das einfache Rechnen mit folgenden Anforderungen auf dem Plan:

> „Fertigkeiten in allen Formen der bürgerlichen Rechnungsarten und der Raumberechnungen, sowie Einsicht in die Methode und die Fähigkeit, das eingeschlagene Verfahren darzustellen und zu begründen.“[245]

Die allgemeinen Anforderungen der Lehrerinnenprüfungen, wie sie LEXIS[246] schildert, umfassen im Fach Rechnen drei Aufgaben, die sich auf die oben zitierten Gebiete beziehen (im dortigen Beispiel zwei Aufgaben der „bürgerlichen Rechnungsarten“, d. h. Zinsrechnung, und eine Aufgabe zur Raumberechnung). Damit entsprechen sie genau den Anforderungen, die sich auch in den Prüfungsakten von Stift Keppel dokumentieren.

So wie der allgemeine Stellenwert des Mathematikunterrichts im Dritten Reich sank (vgl. →*Kapitel 2.2.6*), so veränderte sich auch seine Rolle im Fächerkanon der höheren Mädchenschulen. In den neuen Lehrplänen von 1938 heißt es in Ergänzungen zu den Zielbestimmungen am Jungengymnasium:

---

241 M. SIMON (²1908). S. 50.
242 W. LIETZMANN (²1926), S. 223.
243 Vgl. W. LEXIS (1904), S. 323.
244 Zit. bei ebd., S. 327.
245 Zit. bei ebd., S. 332.
246 Siehe ebd., S. 343.

> „In der Oberstufe der Mädchenschulen wird in der sprachlichen Form weiter noch die ebene Trigonometrie auf das rechtwinklige Dreieck beschränkt; die Integralrechnung fällt weg. In der hauswirtschaftlichen Form und in der Aufbauschule für Mädchen bleibt auch die Differentialrechnung fort. Dafür treten in den höheren Mädchenschulen praktische Fragen der häuslichen und völkischen Geldwirtschaft und mathematische Betrachtungen zur Kunst und zum Kunstgewerbe stärker hervor.“[247]

Ausgehend von diesen kurzen Erläuterungen ergeben sich für die Auswertung der Abschlussarbeiten von Stift Keppel nur geringe Auswirkungen:
– Die Lehrerinnenprüfungen bis zum Jahr 1912 dürfen nicht als Abiturarbeiten bewertet werden. Die fachlichen Anforderungen sind geringer und weniger auf die reine Mathematik bezogen, sondern vielmehr an einfacheren Rechenvorgängen orientiert.
– Die Aufgaben des Mädchenabiturs bis 1925 sind in der gleichen Art gestaltet wie die des Jungenabiturs, abgesehen von leichten thematischen Schwerpunktverschiebungen.
– Nach 1937 wurden in Stift Keppel keine schriftlichen Mathematikprüfungen im Abitur abgehalten, wenngleich ein zum Jungengymnasium vergleichbarer Mathematikunterricht abgehalten wurde. Vergleiche können nur anhand der Arbeiten von 1942 bis 1944 gezogen werden. Auch hierfür gelten ähnliche geringe Abweichungen wie für das Mädchenabitur von 1913 bis 1925.
– Für die Mathematik-Abiturarbeiten der verschiedenen Zweige in den 1960er Jahren müssen keine unterschiedlichen Maßstäbe berücksichtigt werden, wie allein die Tatsache zeigt, dass die Aufgabe E.20f (2) des Frauenbildungs-Zweiges wenige Jahre später auch unter E.25p (1) für das Abitur des pädagogisch-musischen Zweiges verwendet wurde.

4.1.3 Bestand und Erfassung des Schularchivs

Den wesentlichen Anteil der im Schularchiv von Stift Keppel archivierten Akten bilden die Dokumente zu den Abiturprüfungsvorgängen seit 1894. Außerdem sind dort Schülerlisten, Klassenbücher, Personalakten und Jahrbücher gelagert; daneben weitere Einzeldokumente der Schulgeschichte.
In die Mappe mit der Bezeichnung „Reifeprüfung. Prüfungsakten 1921“ sind alle erhaltenen Prüfungsunterlagen im Fach Mathematik von 1894 bis 1923 eingeordnet. Die erste Reifeprüfung („Mädchenabitur“) fand im Jahr 1913 statt, alle vorigen Arbeiten waren Lehrerinnenprüfungen der Seminaristinnen. Zum Vergleich und der Vollständigkeit halber habe ich auch die Lehrerinnenprüfungen in die Dokumentation aufgenommen.

---
[247] Zit. nach W. Lietzmann / U. Graf (1941), S. 92.

In der Regel wurde für jeden Jahrgang exemplarisch eine Schülerarbeit aufgehoben, in wenigen Fällen ist die Niederschrift sämtlicher Aufgabenvorschläge aus der Hand des Lehrers vorhanden. Neben den Abschluss- bzw. Reifeprüfungsarbeiten wurden vereinzelt auch die Arbeiten zur Aufnahmeprüfung in die erste Oberlyzealklasse (OL.I) aufbewahrt. Wenn aus der Beschriftung der Arbeiten nicht direkt hervorging, ob es sich um eine Reifeprüfungs- oder OL.I-Aufnahmeprüfungs-Arbeit handelte, konnte ich diese Entscheidung anhand des Schülerinnennamens und der bei H. FLENDER / W. HARTNACK[248] abgedruckten Matrikellisten vornehmen. Für die Jahre 1900, 1917, 1918, 1924 und 1925 sind keine Arbeiten vorhanden.

Für meine Untersuchungen ist es ein Glücksfall, dass gerade die Mathematikarbeiten bereits seit 1894 in dieser Mappe aufbewahrt sind. Eine Erklärung dafür, dass keine einzige Arbeit aus einem anderen Fach von vor 1924 erhalten blieb, konnte ich nicht finden. Vor 1894 gab es keine Abschlussprüfungen in Stift Keppel. Daher dokumentiert der erfasste Bestand den gesamten Zeitraum in Stift Keppel gestellten Abschlussprüfungs-Aufgaben im Fach Mathematik.

In den Mappen „Reifeprüfungen 1916“, „Lehramtsprüfungen 1922“ und „Reifeprüfung des Oberlyzeums Ostern 1925“ fanden sich keine relevanten Prüfungsakten. Seit Einführung des vollwertigen Mädchenabiturs 1926 sind jeweils sämtliche Unterlagen zu den Reifeprüfungsvorgängen archiviert. Teilweise wurden Oster- und Herbst-Prüfungstermine noch in einer Mappe zusammengefasst, bei zunehmender Aktenanzahl wurden mehrere Mappen angelegt. Seit 1970 sind die Abiturakten jahresweise in Ordnungssystemen zusammengefasst, dabei enthält der jeweils erste Ordner die allgemeinen verwaltungstechnischen Unterlagen, der jeweils zweite Ordner die Vorschläge zu den schriftlichen Prüfungsarbeiten und die Protokolle der mündlichen Prüfungen. Ab 1988 sind auch die Schülerarbeiten wieder erhalten, sie sind in einem dritten Ordner eingeheftet.

Bei der Erfassung der Arbeiten ging ich chronologisch vor. Die Erfassung bestand im Abschreiben und Ordnen der Abituraufgaben (→*Anhang 1*). Dabei nahm ich von Anfang an nur diejenigen Aufgaben auf, die aus den Vorschlägen ausgewählt wurden. Um Übersichtlichkeit und Vergleichbarkeit zu gewähren, wurden beim Abschreiben einheitliche Kriterien berücksichtigt. Dazu zählt in erster Linie eine einheitliche Nummerierung der Aufgaben; die Prüfungsar-

[248] H. FLENDER / W. HARTNACK (1961), Schülerinnenmatrikeln, S. 1-262.

beiten wurden mit einer durchlaufenden Bezeichnung versehen, die zugleich eine schnelle Zuordnung beim Zitieren erlaubt sowie durch die vorangestellten Buchstaben (A bis F) die Prüfungsformen grob gliedert. An Schreibweise und Formulierungen wurde nichts Wesentliches geändert, offensichtliche orthographische Fehler wurden stillschweigend behoben.
Bis 1969 habe ich unter jeder Arbeit das Datum vermerkt, an dem die schriftliche Prüfung stattfand. Es erscheint mir sinnvoll, zu kennzeichnen, welcher Lehrer die Prüfungsaufgaben stellte (und die Arbeiten hinterher korrigierte), da persönliche Eigenheiten in der Art der Aufgabenstellung zu bemerken sind, die manchmal stärkere Einschnitte bewirken können, als Neuerungen der allgemeinen Fachdidaktik. Ab 1964 sind die Namen der Lehrer nur noch abgekürzt angegeben, um keine direkte Verbindung zu den noch lebenden und möglicherweise persönlich bekannten Personen ziehen zu können.
Am Ende der Dokumentation im → *Anhang 1* ist vermerkt, welche Abiturvorschläge im Laufe der Jahre wiederverwendet wurden. Diese Übersicht erlaubt einen Vergleich der sich teilweise dennoch in Details unterscheidenden Aufgabenstellungen, der Rückschlüsse auf zeittypische Ausdrucksweisen zulassen kann. Bei der sehr zeitaufwendigen Erfassung der Arbeiten war es nur stichprobenartig möglich, einen Blick auf die Dokumente im Umfeld der erfassten Daten zu werfen (nicht genommene Vorschläge, Voraussetzungen der Lerngruppe, Musterlösungen, Schülerleistungen etc.). Wo diese stichpunktartigen Seitenblicke von Interesse sind, werde ich sie im Text erwähnen.

4.2. Auswertung des Archivbestandes

Nach der Erfassung des Archivmaterials soll im zweiten Schritt nun dessen Auswertung vorgenommen werden. Dazu habe ich verschiedene Fragestellungen gewählt, die einen gelenkten Zugang zur inhaltlichen und didaktischen Analyse der Arbeiten bieten.
Der erste allgemeine Überblick soll einige übergeordnete, v. a. in der äußeren Gestaltung der Prüfungsarbeiten erkennbare Veränderungen aufzeigen. In der inhaltlichen Analyse werden v. a. die Verschiebungen in den stofflichen Schwerpunktsetzungen betrachtet. Die Analyse der Art der Aufgabenstellungen (und Lösungen) bewegt sich noch eher im Bereich der allgemeinen Didaktik, während das nachfolgende Kapitel eine fachdidaktiksche Auswertung der Prüfungen vornimmt.

4.2.1 Allgemeiner Überblick

Überschaut man alle dokumentierten Prüfunsarbeiten, ist zunächst eine rein äußere Gemeinsamkeit auffällig: Fast immer ist eine Einteilung in drei Aufgaben festzustellen. Dies ist bereits bei den Lehrerinnenprüfungen von 1894 bis 1911 festzustellen. (Es ist nicht zu klären, warum in A.1 sechs Aufgaben bearbeitet wurden, da weder Datum noch genaue Umstände der Lehrerinnenprüfung bekannt sind.) Fast zeitgleich mit der Einführung des (eingeschränkten) Mädchenabiturs wächst die Zahl der Aufgaben auf vier (A.21 bis C.1, 1912 bis 1926), danach werden nur noch drei Aufgaben gestellt. (Die Zusatzaufgabe aus D.2 soll unberücksichtigt bleiben.)

Allgemein erlaubt die Aufteilung in mehrere thematisch unabhängige Aufgaben (Ausnahme: F.17GK2, dort aber numerische Unabhängigkeit) anders als beim früheren mathematischen Aufsatz eine Berücksichtigung mehrerer Themengebiete, bei der aber dennoch Schwerpunkte gesetzt werden können. Dieser Schwerpunkt lag bei den Lehrerinnenprüfungen in den konkret anwendungsbezogenen Aufgaben, die in der Regel mit zwei Aufgaben vertreten waren (ausgewählt aus sechs Vorschlägen); nur eine geometrische Aufgabe war vertreten (ausgewählt aus zwei Vorschlägen).

Bis 1925 verlangten die Bestimmungen für die Abiturklausuren eine Gliederung in vier Aufgaben, die sich – wie oben erwähnt – auch bei den Prüfungsarbeiten des Mädchenabiturs zwischen 1912 und 1926 wiederfindet. Damit zeigt sich die größere Bedeutung, die der Mathematik im Abitur gegenüber dem Lehrerinnenabschluss beigemessen wurde. Mit den Bestimmungen der revidierten Meraner Lehrpläne wurde die Anzahl der Prüfungsaufgaben auf drei reduziert (vgl. →*Kapitel 3.1.8*), um damit das Anspruchsniveau der einzelnen Aufgaben heben zu können.

Der Umfang der einzelnen Aufgaben wuchs immer stärker an, so dass seit etwa Mitte der 1960er Jahre die drei Aufgaben in mehrere Teilaufgaben unterteilt wurden, so wie es auch von den Lehrplänen bis heute gefordert ist. Diese Entwicklung zeigt eine Abwendung vom rein ergebnisorientierten Rechnen hin zum vielschichtigen Erfassen mathematischer Fragestellungen, welches durch die Teilaufgaben, die in einem „Problemzusammenhang“ stehen, gelenkt wird.

Die Reduzierung der Aufgabenzahl in den Grundkursarbeiten nach der Oberstufenreform der 1970er Jahre markiert die reduzierten Anforderungen gegenüber dem Leistungskurs. Diese Reduzierung bezieht sich aber im Wesentlichen auf die Stofffülle, weniger auf fachliche Anforderungen, wie ein allgemeiner Blick auf die Aufgabenstellungen zeigt. Mit dieser Differenzierung zwischen den Kursarten steht der Leistungskurs klar in der Tradition des früheren Oberstufen-Mathematikunterrichts, während mit dem Grundkurs eine ganz neue Form der Anforderungsreduzierung erzeugt wurde. Ein solches Maß von innerer Differenzierung bot selbst die Zweigbildung der 1960er Jahre nicht.

Schon immer war es so, dass der Fachlehrer, der die Klasse zuvor unterrichtet hatte, mehrere Aufgaben für die Prüfung vorschlug, aus der dann einige Aufgaben zur Bearbeitung ausgewählt wurden. Anfangs musste vom Direktor (in Stift Keppel in Person der Stiftsoberin) die Genehmigung der Vorschläge eingeholt werden, danach folgte die Auswahl durch das Provinzialschulkollegium. Nach dem Zweiten Weltkrieg war das „Schulkollegium Münster“ für die Auswahl der Vorschläge zuständig. Diese Aufgabe übernahm ab 1985 ein Fachdezernent der Bezirksregierung in Münster, ab 1986 bis heute ein Fachdezernent der Bezirksregierung Arnsberg. Während früher eine bestimmte Anzahl von Aufgaben zur Auswahl eingereicht wurde, wurden die Aufgaben nach dem Zweiten Weltkrieg zu zwei Vorschlägen zusammengefasst, so dass zwischen beiden Gesamtvorschlägen ausgewählt werden musste. Damit war eine bessere Abstimmung der Aufgabenanforderungen untereinander gewährleistet. Seit 2004 müssen wieder einzelne Aufgaben vorgeschlagen werden, aus denen drei (LK) bzw. zwei (GK) ausgewählt werden.[249] Dadurch ist es erforderlich, dass alle Aufgaben möglichst gleiche Anforderungen und gleichen Umfang haben, was – wie die Einsicht der jüngsten Abiturvorschläge von Stift Keppel zeigt – zunächst offenbar Schwierigkeiten darstellte.

Nur am Rande erwähnt sei, dass die Anlagen zu den Prüfungsvorschlägen im Laufe der Zeit auch immer umfangreicher wurden. So finden sich im Archiv von Stift Keppel ab 1952 konkrete fachliche Anmerkungen zum Erwartungshorizont und zum Ausfall der Leistungen. Zuvor wurde auf die persönliche Einschätzung der Schülerinnen (Lebensläufe, persönliche Einschätzungen durch das Lehrerkollegium) in der schriftlichen Erfassung der Prüfungsumstände mehr Wert gelegt. Seit den 1970er Jahren gehören bis heute zu den Abiturvorschlägen: Angaben über die unterrichtlichen Voraussetzungen für die Lösung der Aufgaben, eine Beschreibung der erwarteten Schülerleistungen sowie eine Lehrerlösung (Musterlösung).[250]

Die ersten Akten, die ich im Schularchiv aufgenommen habe, wurden natürlich handschriftlich abgefasst. Da die Darstellung von mathematischen Formeln in

---

[249] Vgl. http://www2.bezreg-duesseldorf.nrw.de/schule/mathe/abitur/… (05.05.2006).

[250] Vgl. § 33 APO-GOSt und VV 33.42.

Maschinenschrift lange Zeit problematisch war, gab es bis zur Wende zum 21. Jahrhundert immer noch mehrere Lehrer, die ihre Vorschläge mit der Hand schrieben oder zumindest maschinenschriftliche Texte per Hand ergänzten. Die Prüfungsarbeit B.12 (1935) ist die erste, die maschinenschriftlich abgefasst wurde. Mit Hilfe des Computers und bspw. des Microsoft Formel-Editors wurde es in den 1990er Jahren möglich, die kompletten Vorschläge mit Computer abzufassen, so dass in den letzten Jahren auch die Vordrucke der Formblätter wegfielen und als Dokumentvorlagen in WORD genutzt wurden.

Schon sehr früh sind die erlaubten Hilfsmittel zur Bearbeitung der Aufgaben angegeben. Dazu zählen fast immer Zeichengrät und Formelsammlung. Die verwendeten Formelsammlungen waren in der Regel jene von Schülke, in früherer Zeit kamen entsprechende Logarithmentafeln (vierstellig) hinzu. In jüngerer Zeit gingen einige Lehrer auch dazu über, mit den Kursen eigene Formelsammlungen zu erstellen, die dann anstelle allgemeiner Sammlungen im Abitur verwendet wurden. Dazu kamen teilweise Rechenstäbe oder Atlanten (für die geodätischen Aufgaben in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts).

Seit den 1980er Jahren sind Taschenrechner (TI-30 oder vergleichbare Modelle) als Hilfsmittel im Abitur erlaubt. Dadurch musste die Aufgabenstellung nicht mehr auf „glatte Ergebnisse“ ausgerichtet sein. In Stift Keppel wurde bisher keine Abituraufgabe gestellt, die konkret auf die Verwendung von programmierbaren Taschenrechnern und Computern hinweist, wie es die Lehrpläne von 1999 vorsehen.[251] Auch wenn im Unterricht der Oberstufe teilweise Erfahrungen mit entsprechenden Programmen gesammelt wurden, hielten bisher die Probleme der praktischen Umsetzung von einer Verwendung im Abitur ab.

4.2.2 Inhaltliche Auswertung

Bei der Übersicht über die in den Aufgaben in Stift Keppel behandelten Stoffgebiete sind erwartungsgemäßg inhaltliche Parallelen zu den in den letzten Kapiteln dargelegten Entwicklungen festzustellen.

Nur ein kurzer Blick soll auf die Lehrerinnenprüfungen zwischen 1894 und 1912 geworfen werden. Ihre Aufgaben stammen vorwiegend aus dem Bereich des kaufmännischen Rechnens, der Zinsrechnung sowie der Geometrie. Die Geometrie war in jeder Arbeit mit einer Aufgabe vertreten, die übrigen Aufgaben waren aus dem Bereich der Arithmetik und konnten verschiedene Teilge-

[251] Vgl. MSWWF (1999), S. 75.

biete daraus beinhalten. Alle drei oben genannten Themengebiete sind über den Zeitraum hinweg allerdings anteilig ziemlich gleich vertreten.

Die Arbeit A.21 (1912) zählt zwar noch als Lehrerinnenprüfung, ist von ihrer Art her aber schon eher den nachfolgenden Arbeiten des eingeschränkten Mädchenabitus zuzurechnen (dies dürfte allerdings auch mit dem Lehrerwechsel zu Herrn Fischer zusammenhängen). Hier werden erstmals Variablen verwendet. In der dritten Aufgabe wird eine Gleichung in mathematischer Ausdrucksweise dargestellt (d. h. nicht in Worte gekleidet).

Die Anwendung der Dreiecksrechnung auf Längenbestimmungen ist ein beliebtes Merkmal geometrischer Aufgaben des Mädchenabiturs. Mit Aufgabe B.1 (1) wird dazu der Anfang gemacht. Nach der Einführung des Vollabiturs 1926 wird dieser Bereich auf Aufgaben aus der sphärischen Geometrie erweitert (z. B. Aufgaben C.1 (3), C.3 (3), C.5 (1) usw.). Bei den stereometrischen Aufgaben sind auch Kugel, Kegel und Kegelstumpf als Körper einbezogen.

Des Weiteren gewinnt das Zeichnen Bedeutung (eine Forderung, die in den Meraner Plänen bald darauf schriftlich fixiert wird). Fast in jeder Arbeit gibt es eine Aufgabe, in der explizit nach einer Konstruktionszeichnung verlangt wird (so z. B. B.1 (3), B.2 (4), B.3 (3), B.4 (4) usw.).

Mit der Einführung des Vollabiturs werden auch die Kegelschnitte thematisiert. So finden sich immer wieder Aufgaben zu diesem Bereich (z. B. C.1 (2), C.4 (2), C.7 (3) usw.). Bei der Wurzelberechnung kubischer und höherwertiger Gleichungen wird auch die Menge der komplexen Zahlen immer wieder angeschnitten, so z. B. B.8 (2) und C.4 (3).

Die erste ausgewiesene Kurvendiskussion wird 1931 verlangt (C.6 (1)). Damit ist die Infinitesimalrechnung zwar noch nicht zwingender Bestandteil der Abituraufgaben von Stift Keppel, wird aber immer öfter in einzelnen Aufgaben behandelt. Es mag nicht verwundern, dass gerade in den Abiturarbeiten der Kriegszeit (D.1 bis D.3) keine Kurvendiskussion durchgeführt wurde – die Lösung konkret-anschaulicher Aufgabenstellungen entsprach eher den reduzierten Ansprüchen des Frauenabiturs.

Die Aufgaben der Nachkriegszeit zeigen keine Änderung der Inhalte gegenüber den Arbeiten vor dem Krieg. Meistens fordert eine Aufgabe eine Kurvendiskussion, die beiden anderen sind aus dem Bereich der analytischen Geometrie (Schwerpunkte Kegelschnitte/Rotationskörper). In den 1960er Jahren ist eine Erweiterung der Themengebiete zu erkennen, d. h. dass z. B. in der Analysis die Kurvendiskussion um nicht-grundlegende Operationen erweitert wird (bspw. Angabe von Tangentengleichungen etc.). In Aufgabe E.16 (3) wird eine vollständige Induktion gefordert; diese und ähnliche Beweismethoden sind in der Folgezeit öfter anzuwenden. Ab Mitte der 1960er Jahre treten gehäuft Aufgaben auf, die den Abbildungsgedanken betonen (Restklassenberechnung, Gruppenaxiomatik, Affinitäten etc.) – ein besonders gutes Beispiel, das auch die typische Darstellungsweise verdeutlicht, ist E.23f (3); diese Aufgabe bildet den Schwerpunkt der ganzen Arbeit. Hierin zeigen sich die Auswirkungen der Neuen Mathematik. – In der Geometrie setzt sich der Bereich der Koordinaten- bzw. Vektorgeometrie durch.

Spätestens nach Einführung der differenzierten Oberstufe fallen die Kegelschnitte in den Abiturarbeiten weg. Schon früher traten solche Aufgaben nur noch gelegentlich auf; die letzte Kegelschnitt-Aufgabe wurde 1973 gestellt (E.26p (2)). Der Abbildungsgedanke wird noch wenig länger explizit zum Ausdruck gebracht (bspw. in F.2LK (2)) – Mitte der 1980er Jahre tritt er ganz zurück.

In der Analysis werden nun meistens Funktionenscharen (1977 in F.1GK (1) noch als Funktionenmenge bezeichnet) diskutiert. Oder es kommen auch abschnittsweise definierte Funktionen vor.

Aufgaben aus der Stochastik wurden in Stift Keppel nur selten gestellt, erstmals im Grundkurs 1979 (F.3LK (1)). In den 1990er Jahren wurde keine einzige Stochastik-Aufgabe gestellt.

Erst 2006 ist mit Aufgabe F.30LK (3) die Stochastik wieder im Abitur vertreten. Auch der Abbildungsgedanke wird hier wieder aufgegriffen (F.30LK (2) und F.30GK1 (2)). Diese neuesten Entwicklungen entsprechen den Anforderungen der jüngsten Lehrpläne von 1999.

4.2.3 Aufgabentypen

An der Art und Weise, wie die Prüfungsaufgaben aufgebaut und formuliert sind, lassen sich didaktische Zielsetzungen erkennen, auf die im nächsten Abschnitt (→*Kapitel 4.2.4*) in größerem Rahmen noch näher eingegangen wird. Daneben soll auch berücksichtigt werden, wie die Schüler ihre Lösungen präsentieren, was aus der Erfassung der Aufgabenstellungen nicht direkt hervorgeht.

Zunächst möchte ich die sprachliche Formulierung der Arbeitsaufträge betrachten. Dabei sind zwei grundsätzliche Typen zu unterscheiden:

1. Fragestellung („?“) und
2. Aufforderung („!“).

Bei den Aufgaben des 1. Typus ist weiterhin zu differenzieren, ob es sich

(a) um eine ergebnisorientierte „W-Frage“ handelt, die in der Regel auf eine knappe Antwort (meist in Form einer Zahl) als Ergebnis zielt, oder

(b) um eine Entscheidungsfrage, die implizit nach einer Begründung (einem Beweis) für die Entscheidung verlangt.

Der 2. Aufgabentypus stellt in der Regel einen umfangreicheren Arbeitsauftrag dar. Natürlich sind auch hier die Grenzen zwischen den Aufgabentypen fließend (z. B. „Wie lautet das Ergebnis für …?“ und „Geben Sie das Ergebnis für … an!“).

Eine Untersuchung der Prüfungsarbeiten nach Aufgabentypen möchte ich hier nur stichpunktartig vornehmen, da bei einer Komplettbetrachtung das Ergebnis nicht in sinnvoller Relation zum Arbeitsaufwand stünde.

Ein Blick auf die Lehrerinnenprüfungs-Aufgaben zeigt, dass die Aufgabenstellungen fast ausschließlich von Typ 1(a) sind: „Wie groß …?“, „Wie lang …?“, „Wie teuer …?“, „Wie oft …?“, „Wieviel wiegt …?“, „Wieviel kostet …?“ usw. Nur sehr wenige Aufgaben weichen von diesem Typ ab, z. B. A.10 (2); in der Aufgabenstellung ist die Frage „Wieviel ℳ hat man am 31. Dezember 1900?“ allerdings implizit enthalten. Interessanter ist schon Aufgabe A.13 (2) von 1904, die eine Anweisung zur allgemeinen geometrischen Konstruktion ohne konkrete Größenvorgaben gibt – die erste und bis 1911 einzige Aufgabe, die weder explizit noch implizit dem Aufgabentyp 1(a) zuzurechnen ist.

Ab 1911 (A.20) tauchen solche Aufgabentypen (Typ 2) mit der Anweisung zu einer geometrischen Konstruktion häufiger auf. Die Einführung des Abiturs als höherwertiger Abschluss, bei dem eine stärker verständnisorientierte Aufgabenstellung gegebenüber rein ergebnisorientierten Rechenaufgaben die adäquatere Form war, dürfte der ausschlaggebende Grund für diesen Wandel sein. Nicht übersehen werden darf allerdings, dass ab dem gleichen Zeitpunkt nicht mehr Lehrer Herbst, sondern Lehrer Fischer der hauptsächliche Aufgabensteller war, und somit auch persönliche Eigenarten und deren mathematischer Bildungsgrad Einfluss genommen haben werden. Das spiegelt sich auch in der Eigenart, Aufgaben des Typs 2 mit Hilfe des Imperativs in „Infinitiv+zu“-Form zu formulieren: „Ein Dreieck zu zeichnen aus …“ u. ä. – eine durchaus zeittypische Formulierung.

Die Schülerlösungen waren immer in zusammenhängender Textform verfasst. So war auch bei den letztgenannten Konstruktionsaufgaben sowohl eine zeichnerische Lösung mit Zirkel und Lineal als auch eine Konstruktionsbeschreibung verlangt. Das Vorgehen war sicherlich aus dem Unterricht bekannt; Fischer fügte diesen Aufgabenstellungen in der Regel in Klammern die

Anweisung „Analysis, Konstruktion (und Determination)“ hinzu.[252] Auch die reinen Rechenaufgaben wurden in zusammenhängend ausformuliertem Text gelöst, so dass jeder Rechenschritt genau erläutert werden konnte.

Die Aufgaben A.21 (3) und B.2 (3) kommen ganz ohne ausformulierte Arbeitsanweisungen aus. Aus der bloßen Nennung der mathematischen Gleichung müssen die Schülerinnen schließen, dass damit die Auflösung nach *x* verlangt ist. Auch diese Aufgabenart ist sicherlich vorher im Unterricht eingeübt worden.

Seit der Einführung des vollwertigen Mädchenabiturs 1926 sind die Aufgabentypen 1(a) und 2 weitgehend gleichstark vertreten. Zugleich werden die Aufgabenanforderungen komplexer; es geht nicht mehr nur immer um die richtige Lösung in Form einer Zahl als Ergebnis, sondern auch um den Lösungsweg als mehrschrittiges Verfahren. Zunehmend umfassen die Aufgaben auch mehrere Aufgabenstellungen (z. B. C.5, wo in den ersten beiden Aufgaben mehrere Ergebnisse gefordert werden).

Besonders interessant sind die Aufgaben D.5 (3) und E.1 (3). Hier ist durch die Aufgabenstellung das Thema bzw. die Überschrift eines Aufsatzes vorgegeben. Wenn man davon ausgeht, dass damit nicht zum Abspulen von auswendig gelernten Definitionen aufgefordert werden sollte, so sind dies die einzigen Aufgabenbeispiele, wo in dieser Art und Weise das Verständnis mathematischer Zusammenhänge überprüft wird. Die Formulierung der Aufgabenstellung ist somit sehr allgemein gehalten und lässt sich nur bedingt Aufgabentyp 2 zuordnen.

Betrachtet man nun die weitere Entwicklung der Aufgabentypen des Vollabiturs nach dem Zweiten Weltkrieg, so lässt sich eine allmähliche Verschiebung hin zur reinen Anwendung des Aufgabentyps 2 feststellen. Besonders auffällig ist dieser Schritt 1963 (E.15), ab welchem Zeitpunkt die Aufgabenstellungen immer vielschichtiger werden (u. a. durch Untergliederung in mehrere Teilaufgaben). Die Fragen, die in den Aufgaben gestellt werden, sind nun meistens Typ 1(b) zuzuordnen („Warum?“, „Welcher Zusammenhang?“ etc.). Wenn nach einer konkreten Größe als Ergebnis gefragt wird (entweder durch Typ 1(a) oder Typ 2 „Berechne“), dann ist das jetzt nicht mehr das Hauptziel der Aufgabenstellung, sondern nur ein Teil der Forderung nach einem komplexeren Lösungsgang. Als Beispiel möchte ich (wahllos) die Arbeit E.20f heranzie-

[252] „Als Determination bezeichnet man die Untersuchung, deren Ziel es ist, festzustellen, unter welchen Größenverhältnissen eine Konstruktionsaufgabe lösbar ist und in welchen Fällen die Lösung eindeutig bzw. mehrdeutig ist.“ (*Meyers Großer Rechenduden* (1961). Mannheim. S. 95)

hen, in der ich die Aufgabenstellungen den einzelnen Aufgabentypen zuordnen möchte:

1. a) Typ 2 (Anweisung zur Kurvendiskussion und zum Zeichnen)
   b) Typ 2 (Anweisung zur Berechnen der Tiefpunkt-Koordinaten)
   c) Typ 2 (Beweisführung)
2. a) Typ 2 (Anweisung zur Bestimmung des Schnittpunktes)
   b) Typ 2 (Beweisführung)
3. a) Typ 2 (Anweisung zur Aufstellung einer Volumengleichung)
   b) Typ 1(a) (Extremwertberechnung)
   c) Typ 2 (Angabe des Volumens)

Die Dominanz des Aufgabentyps 2 ist deutlich. Durch den Aufgabentyp 1(a) in Aufgabe 3b) wird zwar nach der Angabe konkreter Zahlen gefragt, deren Berechnung ein mehrschrittiges Verfahren verlangt; damit ist Aufgabe 3b) mit den Arbeitsaufträgen der Aufgaben 1b) und 2a) in der Aufgabenart gleichzusetzen. Der Blick auf die anderen Prüfungsarbeiten lässt feststellen, dass anstelle des Aufgabentyps 1(a) nun oft eine Formulierung mit „Berechnen Sie …“ bzw. „Bestimmen Sie …“ tritt.

Wie die kurzen Ausführungen zeigen, entwickelte sich mehr und mehr eine Vielgestaltigkeit der Aufgabenstellungen, die auch eine Binnendifferenzierung zwischen den oben genannten Aufgabentypen mit sich brachte. Ein Blick über die Aufgaben der letzten Jahrzehnte seit etwa Mitte der 1960er Jahre zeigt, dass sich daran bis heute nicht mehr viel geändert hat.

Mit dieser Differenzierung und Umfangerweiterung der Aufgabenstellungen änderte sich auch die Art der Schülerlösungen. An einen vollständig ausformulierten Lösungsgang war nun nicht mehr zu denken, da das sowohl den zeitlichen Rahmen sprengen würde als auch zu Lasten der Übersichtlichkeit gehen würde. Denn je komplexer die Lösungswege werden, umso wichtiger ist eine exakte Darstellung, für die eine mathematisch korrekte Ausdrucksweise die angemessene ist. Andererseits drückt sich das Verständnis mathematischer Zusammenhänge erst im geschriebenen Text aus, so dass Erläuterungen zu den Lösungswegen sowie „Antwortsätze“ stets fester Bestandteil der Schülerlösungen sind. So verlangen auch die Lehrpläne von 1999, dass „eine informative, nicht redundante textliche Gestaltung mit Ansatzerläuterungen, Ergebnisdiskussionen oder Ähnlichem […] bei allen Aufgaben zu den Prüfungsanforderungen [gehört] und […] in die Bewertung einzubeziehen [ist].“[253]

[253] MSWWF (1999), S. 75f.

Eine vergleichbare Forderung fand sich in den früheren Lehrplänen übrigens nicht in dieser Ausdrücklichkeit – diese Tatsache ist sicherlich in Zusammenhang mit den Bestrebungen der Neuen Mathematik zu sehen, die auf technisch genaue, mathematische Ausdrucksweise größeren Wert legte.
Um die Erkenntnisse dieses Abschnittes zusammenzufassen, ist bei der Art der Aufgabenstellungen eine Ausdifferenzierung festzustellen, die von der Abfrage konkreter Ergebnisse hin zur Anweisung für mehrschrittige Lösungswege führt. Damit verbunden ist eine immer größere Ausgestaltung eines Aufgabenkomplexes, der eine Betrachtung von verschiedenen Blickpunkten ermöglicht. Das erlaubt dem Schüler letztendlich ein besseres Fundament zur Entwicklung eigener Lösungsstrategien, die auf festen Lösungsmustern aufbauen, diese aber weiterführen. – Die Form der Schülerlösungen ist im Laufe der letzten ca. hundert Jahre „mathematischer" geworden. D. h. die Form des Aufsatzes für den mathematischen Unterricht wurde abgeschafft. Nach zwischenzeitlich sehr starker Betonung rein mathematisch korrekter Ausdrucksweise sind in den letzten Jahren erläuternde Texte wieder stärker gefordert, die erkennen lassen, ob der Schüler den Gesamtzusammenhang der Thematik verstanden hat.

4.2.4 Didaktische Zielsetzungen

Nun knüpfe ich an die in →*Kapitel 2.1.* formulierten Überlegungen an, wenn ich die didaktischen Zielsetzungen, die den Abituraufgaben zu entnehmen sind, analysiere. Die eingangs dieser Arbeit diskutierten Gründe für den wichtigen Charakter der Mathematik als allgemeinbildendes Schulfach bezogen sich dort besonders auf die heutige Zeit. Doch auch in früheren Zeiten wurden ähnliche Fragen gestellt und unterschiedliche Antworten gefunden – so bspw. im Nationalsozialismus, wo die Mathematik besonders durch ihren Nutzen für die Wehrwirtschaft begründet wurde. Diese „Rechtfertigungsgedanken" der Mathematik nehmen natürlich auch Einfluss auf die Schwerpunkt- und Zielsetzungen des Unterrichts und somit auch der Abiturarbeiten. Einige Aspekte dazu können aus den hier vorliegenden Arbeiten aus Stift Keppel herausgefiltert werden.
Zu dieser Untersuchung ist ein Blick über die Aufgabenstellungen hinaus sinnvoll. Dazu sind in →*Anhang 2* drei Dokumente wiedergegeben, die verdeutlichen können, welche Überlegungen hinter der Art der Aufgabenstellungen stehen. (Leider sind vergleichbare Dokumente erst seit den 1950er Jah-

ren vorhanden, so dass auf frühere Überlegungen kein direkter Bezug genommen werden kann.)

Zunächst möchte ich aber wieder chronologisch am Anfang mit den Lehrerinnenprüfungen beginnen. Ihre didaktische Zielsetzung war gewissermaßen systemintern ausgerichtet – die Absolventinnen sollten durch ihre Prüfung befähigt werden, als Lehrerinnen zu arbeiten (womöglich noch an Stift Keppel selbst). Insofern musste mit den vermittelten mathematischen Kenntnissen keine orientierte Vorbereitung auf eine außerschulische Instanz (im Besonderen die Hochschule) verknüpft werden. Daher waren die Aufgaben vorwiegend recht lebensnah ausgerichtet: kaufmännisches Rechnen (zur Haushaltsführung), Zins- und Rentenrechnung (zur Verwaltung des eigenen Vermögens). Besonders solche Aufgaben wie A.12 (1) kommen den auf hausfräuliche Tugenden ausgerichteten Erziehungszielen sehr entgegen. Daneben bildeten die Geometrieaufgaben erste Anknüpfungspunkte zu abstrakterer Mathematik, wenngleich die Oberflächen- und Volumenberechnungen einfacher Körper noch recht einfach gestaltet waren. Aber auch diese waren oft mit anschaulichen Gedanken des nahen Lebensumfeldes verknüpft (z. B. Zuckerhut in A.14 (3) oder Gartenteich in A.11 (1)). Die Aufgaben A.12 (3) und A.13 (3) haben direkten Bezug zum Schulleben, womit sie auf die zukünftige Tätigkeit der Lehrerinnen ausgerichtet sind.

Das didaktische Ziel dieser Aufgaben war es also, die Prüflinge im Bewältigen alltäglicher Rechnungsfragen zu schulen. Es war nicht ihre Absicht, neue Problemlösestrategien zu entwickeln oder zu abstrahieren. Das änderte sich mit Einführung des Mädchenabiturs. Dazu sei exemplarisch die Arbeit B.2 betrachtet. Ihre vier Aufgaben weisen keinen Bezug mehr zur unmittelbaren Lebensumwelt der Schülerinnen auf. Die zweite Aufgabe nimmt zwar Bezug auf Außermathematisches, wählt dafür aber 1. ein Beispiel aus der Physik (elektrischer Konduktor), 2. hat dieser Bezug aber keine weitere Auswirkung auf die Gestalt der Aufgabe. Die erste Aufgabe fordert eine geometrische Konstruktion, während die vierte Aufgabe mit analytischen Mitteln arbeitet. Die dritte Aufgabe entstammt der Gleichungslehre.

Nicht jede der Arbeiten des Mädchenabiturs zwischen 1913 und 1925 war so rein mathematisch ausgerichtet. Vereinzelt treten noch Zins- und Rentenrechnungsaufgaben auf (B.5 (3), B.6 (3)). Auch die trigonometrischen Aufgaben zur Entfernungs- und Höhenbestimmung (B.3 (4), B4 (3) usw.) haben einen stärkeren Bezug zur Wirklichkeit. In ihnen spiegelt sich in besonderem Maße das in den Meraner Vorschlägen geforderte „utilitaristische Prinzip“ (→ *Kapitel*

2.2.5), also das Bestreben, die Schüler zur mathematischen Erfassung der Wirklichkeit zu erziehen, unter besonderer Berücksichtigung der Aufgabe der Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens. Die Infinitesimalrechnung, die ohnehin nicht explizit von den Meraner Vorschlägen gefordert wurde, ist in den Aufgaben von Stift Keppel noch nicht enthalten. Diese wurde gemäß den Lehrplänen für das Oberlyzeum aber auch gar nicht gefordert (→ *Kapitel 4.1.2*). Vielleicht konnte in ihr nicht sofort ein Bezug zur „Erfassung der Wirklichkeit" gesehen werden? Dazu waren die Erfahrungen mit dem Umgang der Infinitesimalrechnung in der Schule noch zu gering.

Mit der Einführung des vollwertigen Abiturs 1926 steigt auch die didaktische Vielfalt der Aufgaben. Die Arbeit C.1 umfasst sowohl eine Aufgabe der üblichen Zinsrechnung (Aufgabe 4), die beiden mittleren Aufgaben sind aus den Themengebiete der Kegelschnitte und der Sphärik entnommen, und in der ersten Aufgabe wird (in der Lösung) erstmals der Funktionenbegriff angewendet, der zur Extremwertberechnung im analytisch-geometrischen Bereich gebraucht wird. Nicht in jeder der folgenden Arbeiten werden alle Themenbereiche aufgegriffen (allein schon wegen der Reduktion der Aufgabenzahl). Aufgaben aus der Sphärik und im Bereich der Kegelschnitte scheinen zunächst die Schwerpunkte zu bilden. Besonders die Sphärik bildet hier wieder das ideale Mittel zur Anwendung des utilitaristischen Prinzips. Das didaktische Prinzip, also die Konzentration um einen verbindenden Gedanken (besonders den Funktionenbegriff), ist in der allmählichen Bedeutungssteigerung der Kurvendiskussion zu sehen, auch in der Kegelschnittberechnung ist der Funktionsgedanke präsent. Die Bedeutung des psycholgischen Prinzips kann anhand der Abiturarbeiten nur schlecht nachgewiesen werden, da es mehr Einfluss auf die Abfolge der thematischen Vermittlung hat, an dessen Ende das Abitur mit dem höchsten Grade der Abstraktion steht.

Der deutliche Rückgang der beschriebenen Entwicklungen, v. a. das Fallenlassen des zentralen Funktionsgedankens ist in den Arbeiten des Zweiten Weltkriegs (D.1 bis D.3), festzustellen. Entsprechend NS-Mutterschaftsideologie war die Abkehr abstrahierender Mathematisierung programmatisch, wie die Zielbestimmungen der Lehrpläne von 1938 zeigten (→ *Kapitel 4.1.2*). Die aktuellen Lebensumstände spiegeln sich in der Aufgabenstellung D.2 (1) wider: der Berechnung des Volumens eines Luftschutzraumes. Interessant ist die Tatsache, dass in jeder Arbeit eine Aufgabe konkreten Bezug auf Stift Keppel nimmt (D.1 (1), D.2 (3), D.3 (3)). Vielleicht ist das als Ausdruck eines gestärkten Wir-Gefühls in schwierigen Zeiten zu deuten.

Gleich nach dem Krieg (D.4) wird der Funktionsgedanke in der ersten Aufgabe wieder aufgenommen. Die besondere Stellung der beiden Aufgaben D.5 (3) und E.1 (3) wurde bereits in →*Kapitel 4.2.3* hervorgehoben. Sie bilden den Mittelweg zwischen mathematischer Abstrahierung und anschaulichem Verständnis; derjenige Schüler, der in diesen Aufgaben sein Verständnis der Thematik beweist, der ist auch in der Lage, dieses Wissen zur Umsetzung auf außermathematische Problemlösungen anzuwenden. Mit heutiger Terminologie ausgedrückt bilden diese Aufgaben somit die Grundlage zu Modellbildungs-Fähigkeiten.

Die nahezu nahtlose Anbindung der Nachkriegs-Schulmathematik an die Zeiten vor dem Dritten Reich lässt sich nicht mit einer etwaigen Stagnation der mathematischen und mathematikdidaktischen Weiterentwicklung begründen. Wie die Bemerkungen zur Abiturarbeit 1952 zeigen (Material 1), spielen auch gesellschaftspolitische und soziologische Aspekte eine Rolle, wenn die Folgen der Kriegswirren noch lange auf Klassenzusammensetzungen und lückenhafte Schullaufbahnen der Schüler(innen) Einfluss nehmen. Daher ist es verständlich, dass die Weiterentwicklung der Fachdidaktik in den unmittelbaren Nachrkriegsjahren zunächst nur nachrangige Bedeutung hatte.

Auffallend andersartig ist die Aufgabe E.3 (3), deren konkretes Beispiel der Reklamesäule erstmals keine äußerliche „eingekleidete“ Mathematik darstellt. Der Ausgangspunkt dieser Aufgabe ist nicht das mathematische Modell, für den eine passende Anwendung gesucht wird, sondern *zuerst* ist das praktische Problem, das *dann* nach einem mathematischen Modell verlangt, um zu einer Lösung zu gelangen. Leider steht diese Aufgabe in ihrer Art sehr alleine da, die Aufgaben E.5 (1) und E.13 (1) bilden die einzigen vergleichbaren Ausnahmen innerhalb der nächsten 20 Jahre! Auch im Bereich der sphärischen und geodätischen Aufgaben bildet E.4 (2) 1952 den Schlusspunkt.

Damit ist die Forderung der Meraner Pläne zur Erziehung der Schüler zur mathematischen Erfassung der Wirklichkeit überholt. Diese Forderung möchte ich jedoch als zentralen Gedanken des Allgemeinbildungsauftrages der höheren Schulen bezeichnen. – Die Mathematik der 1960er/70er Jahre war allerdings weniger auf die „Erfassung der Wirklichkeit“ als vielmahr auf den Anschluss an den Stand der Mathematikwissenschaft (an den Universitäten) bemüht. Diese Neuausrichtung, die unter dem Begriff der Neuen Mathematik geführt werden kann, wendet sich daher einer verstärkten Formalisierung und mathematischen Präzisierung zu.

Diese Entwicklung beginnt – wie eben an dem Fortbleiben anwendungsbezogener Aufgaben gesehen – Mitte der 1950er Jahre und gewinnt durch die neuen Lehrpläne von 1963 starken Rückenwind. So zeigen die Arbeiten ab 1963/64 in Stift Keppel sogleich die Auswirkungen der neuen Pläne in Form von Formalisierung und Differenzierung der Aufgabenstellungen.
Durch den Gedanken der mathematischen Exaktifizierung führt der Weg über die Mengenlehre zum Abbildungsgedanken und zum axiomatischen Aufbau der Gruppen- und Körpertheorie. Wurde zuvor der Funktionsbegriff als zentraler Gedanke der Mathematikdidaktik bezeichnet, so dürfte nun der Abbildungsbegriff als mindestens gleichrangiger zentraler Gedanke bezeichnet werden. An der Arbeit E.18 und den als Material 2 in →*Anhang 2* dokumentierten Bemerkungen ist die starke Betonung des Abbildungsgedankens abzulesen.
Ab ca. 1975 ist eine deutliche Kopplung beider Gedanken festzustellen, die sich allein in der Bezeichnungsweise der Funktionsgleichungen ausdrückt. Bis dahin wurden die Funktionsgleichungen meistens in der Form „$y = \ldots$“ angegeben. Erstmals 1969 (E.22f (1)) und nahezu durchgängig ab 1975 ist die Form „$f(x) = \ldots$“ gewählt. In E.29n (1) wurde 1976 erstmals durch die Angabe „$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$“ deutlich gemacht, dass eine Funktion als Abbildung des Wertes x auf ihren Funktionswert zu verstehen ist, bzw. als Abbildung von einer Menge in eine andere (hier für Definitions- und Bildmenge gleichmaßen die reellen Zahlen). Die Funktionenschar der Aufgabe F.1GK (1) wird sogar gleich in Form einer Abbilungsmenge mit $\{\, x \to ax^2 - a + 4 \mid a \neq 0 \,\}$ angegeben.
Die zunehmende Anwendung von Beweisverfahren, besonders der vollständigen Induktion, zeigt deutlich, dass der Anschluss zur „ganzheitlichen“ Mathematik der Universität gesucht wurde. Ein „Ergebnis“ ist immer etwas konkret Fassbares; beim Beweis geht es aber um Abstrahierung und Logik. Dieser Schritt war in der bisherigen Schulmathematik nicht erreicht, höchstens gestreift. Mit dem Gehen dieses Schrittes war nun die Brücke zur Universität und der Wissenschaft geschlagen,[254] ohne dabei zu bemerken, dass – um im Bild zu bleiben – das Fundament der Brücke nun sehr dünn wurde. Denn „Verstehen“ geht nicht in geringem Maße über „Anschauung“. Und diese ging in den Aufgaben – wie oben bereits festgestellt – allmählich verloren. Aufgabe E.29n (2) bietet eine der wenigen Ausnahmen, wo Grundlagenmathematik und abstrahierende Beweismethoden vereint wurden. Die erste wirklich anwendungs-

[254] Siehe dazu auch B. WINKELMANN 1977, S. 279ff.

bezogene Aufgabe seit fast 20 Jahren bietet erst Aufgabe E.26f (3) von 1973 – aber auch sie stellt nur einen Einzelfall dar.

Zu den didaktischen Zielsetzungen der Abiturarbeiten nach Einführung der differenzierten Oberstufe sei ein Apsekt besonders hervorgehoben: Es fällt auf, dass Abiturvorschläge dieser Zeit oftmals mehrfach verwendet wurden, wie die Auflistung am Ende der Dokumentation in →*Anhang 1* zeigt. Dies mag den rein praktischen Grund der Arbeitserleichterung bei der nun sehr zeitaufwendigen Erstellung der Abiturvorschläge haben. Andererseits wird damit eine gewisse Stabilität inhaltlicher und didaktischer Art dokumentiert, wenn Aufgaben beispielsweise über einen Zeitraum von 25 Jahren nahezu unverändert immer wiederverwendet werden können (z. B. F.4LK (2) = F.26LK (3) = F.29LK (3)). Diese Beobachtung wird durch die in →*Kapitel 3.1.8* erwähnte Studie KASTENs anhand der Lehrpläne unterstützt, die für die Pläne der letzten ca. 25 Jahre ausgesprochen hohe Korrelationskoeffizienten nennt.

Nicht immer wurden die Aufgaben wortwörtlich wiederverwendet. Änderungen in den Bezeichnungen und Formulierungen veranschaulichen die leichten Veränderungen der Didaktik im Laufe der Zeit. Dazu möchte ich einige kurze Beispiele nennen:

- In F.8GK (2) 1984 ist für den Winkel ε die Angabe $0° < \omega(\varepsilon) < 90°$ gemacht. Sieben Jahre später (F.15GK1 (2)) heißt es nur noch $0° < \varepsilon < 90°$. Für die Schüler wird die zweite Angabe offensichtlicher sein, während die erste mathematisch Korrekter ist.
- 1977 wird die Funktionenschar in F.1GK (1) mit $\{x \to ax^2 - a + 4 \mid a \neq 0\}$ angegeben, 1995 in F.19GK2 (2) mit $f_a(x) = ax^2 - a + 4$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.
- Die Bezeichnung der Vektoren wechselt im Laufe der Zeit von der Schreibung in deutscher Schrift zur Kennzeichnung mit Vektorenpfeil (z. B. bei F.10LK (2) im Vgl. zu F.17LK (2)).
- In F.18GK1 (1) wird der Begriff „Term“ verwendet, der in F.13GK2 (1) noch nicht benutzt wird.

Diese kleinen Beispiele mögen genügen, um anzuzeigen, wie sich selbst bei gleicher Aufgabenstellung, die präzisen Bezeichnungen der Neuen Mathematik in späterer Zeit zurückgenommen werden konnten. Der Begriff des „Terms“ ist relativ modern, und war bis in die 1980er Jahre weniger in Gebrauch.

Eine immer stärkere Binnendifferenzierung der Aufgaben soll eine Ausgewogenheit der Anforderungen gewährleisten. Dazu gibt Material 3 (→*Anhang* 2) ein deutliches Beispiel, das verdeutlicht, wie genau bei der Aufgabenformulierung auf die drei Anforderungsbereiche geachtet werden muss.

Anwendungsorientierte Aufgaben sind inzwischen ganz „aus der Mode“ gekommen. Nur vereinzelt treten solche Aufgaben, verbunden mit vom Standard abweichenden Aufgabenstellungen auf. Die „Stehaufmännchen“-Aufgabe F.9GK ist dazu eines der herausragendsten Beispiele. Der aufgabenstellende Lehrer zeigt auch sonst öfters innovative Aufgabenstellungen. Die Unterlagen über die Grundkursaufgabe 2 von 1992 F.17GK2 (2) zeigen, wie sehr auch die Auswahl der Vorschläge durch die Bezirksregierung eher das „Standard-Aufgabenschema“ favorisierte. Die ursprüngliche Fassung der 2. Aufgabe ist dazu als Material 4 in →*Anhang 2* wiedergegeben. Dazu schrieb der Fachdezernent:

> „[…] Ihre Vorschläge sind durchaus interessant und eigenständig; aber im Detail problematisch:
> A.2
> Diese Aufgabe erfordert von Anfang an einen Mathematisierungsansatz; dabei ist aus Ihren Angaben nicht ersichtlich, ob die Schüler diesen Schritt zuverlässig leisten können. Eine solche Aufgabenstellung ist aber nicht zulässig (Richtlinien S. 122/123).“[255]

Der Fachlehrer antwortete darauf:

> „[…] Aus den von Ihnen zitierten Teilen der Richtlinien (S. 122/123) kann ich nicht erkennen, warum ein in der Mathematik allgemein anerkanntes und praktiziertes methodisches Vorgehen – die Modellbildung – für das Abitur nicht zulässig sein soll. In meinem Unterricht ist darüberhinaus die Modellbildung ein stets empfohlenes und angewendetes Mittel. Die Schüler wissen das. Wenn ich Ihre Anmerkung dennoch als Bitte zugunsten des Schülers auffassen darf, der sich in schwierigen Situationen eher von Standardstrategien leiten läßt, dann hoffe ich, dem durch die gewählte Umformulierung nachgekommen zu sein. […]“

Umso stärker betonen die jüngsten Richtlinien von 1999 die Bedeutung von Aufgaben der Anwendungsorientierung und Modellbildung (wie z. B. an den Beispielaufgaben in →*Kapitel 3.1.9* festgestellt wurde). Ein Blick auf die letzten Jahre des Abiturs in Stift Keppel zeigt, dass diese Anforderungen noch nicht in der Realtität angekommen sind. Zu dieser Feststellung gelangten wir bereits im Sommersemester 2003 im Rahmen des Seminars „Didaktik der Analysis“[256]. Im Vergleich zwischen Lehrplänen und Abituraufgaben der eigenen Schulzeit wurde festgestellt:

> „Diese Beispielaufgabe [Aufgabe 1 der Lehrpläne von 1999] wurde in einhelliger Meinung der Studenten als „schwer“ bezeichnet – und vor allem ungewohnt. Dabei

[255] Schularchiv Stift Keppel: Akte „Abitur 1992. Vorschläge.“

[256] Universität Siegen, Sommersemester 2003, Seminar „Didaktik der Analysis“ (Prof. Dr. Rainer Danckwerts), Referat und Ausarbeitung zum Thema „*Die staatlichen Vorgaben. Der Standort der Richtlinien zum Analysisunterricht*“ von Simone Löcherbach und Gabriel Isenberg.

> muss sich immer wieder vor Augen geführt werden, dass es sich hierbei „nur" um eine Grundkursaufgabe handelt!
> Hier zeigt sich der Unterschied zwischen der in den Lehrplänen immer wieder geforderten Anwendungsorientierung, die in dieser Beispielaufgabe in besonderem Maße zum Ausdruck gebracht wird, und der Realität im Analysisunterricht an den Schulen, der immer noch eher an elementarmathematischen Rechenmethoden festhält, die weitgehend für sich stehen.
> […]
> Dieser Aufgabentyp [einer Beispielaufgabe aus der eigenen Schulzeit] stellt also das genaue Gegenteil dessen dar, was wir in den Lehrplänen als Beispielaufgaben finden. Da der soeben beschriebene Aufgabentyp heute aber immer noch den Mathematikunterricht beherrscht – Ausnahmen bestätigen die Regel – nimmt es nicht Wunder, dass die meisten der Stundenten im Seminar die Aufgabe aus den Lehrplänen als „schwer" empfanden.
> Damit zeigt sich wieder einmal, dass die Komplexität und Anforderung einer mathematischen Aufgabe wesentlich auch vom vorhergehenden Unterrichtsinhalt abhängt. Wirklich kreative Momente, die durch ihre außermathematische Relevanz Sinn machen, können aber erst hervorgerufen werden, wenn die Grenze vom Mathematischen zum Außermathematischen überschritten wird. Und erst dann bekommt die Mathematik eine Berechtigung, da sie als Hilfsmittel komplexen Problemen zur Lösung verhelfen kann (Stichworte „Modellieren" und „Interpretieren"; zur Schließung des Modellbildungskreislaufes nach Schupp)."[257]

Es wird wohl noch dauern, bis sich das utilitaristische Prinzip der mathematischen Erfassung der Wirklichkeit in der Schulmathematik – so wie es auch in den Allgemeinbildungskonzepten der 1990er Jahre grundgelegt ist – (wieder) umfassend etablieren wird. Das geplante Zentralabitur ist auf jeden Fall ein Mittel, eine größere Einheitlichkeit in der didaktischen Zielsetzung zu erreichen. Dazu soll das folgende Kapitel abschließende Überlegungen liefern.

[257] Isenberg, Gabriel (2003): [Ausarbeitung zum Referat] *Die staatlichen Vorgaben…* (s. o.). Die Arbeit, auf die Bezug genommen wurde, war eine Klausur der Jgst. 13/II in Stift Keppel.

5. Überblick und Ausblick

Am Ende dieser Arbeit soll nun die Frage gestellt werden, die eigentlich hätte an ihrem Anfang stehen müssen: Was rechtfertigt diesen Überblick über 200 Jahre Abitur im Fach Mathematik?
Die bloße Erfassung vergangener Vorgänge kann sicherlich kein Grund sein. Vielmehr steckt im Blick in die Vergangenheit – wie bei jeder Art von Geschichtsforschung – ein großes Potential an Erfahrungen, das für die Zukunft nutzbar gemacht werden kann. Hinzu kommt, dass mit dem Jahr 2006 ein besonderer Wendepunkt in der Abiturgeschichte markiert wird: das Ende des an den Schulen individuell gestellten Abiturs und die geplante Einführung des Zentralabiturs. Damit erfasst diese Arbeit einen abgeschlossenen Zeitraum, der auf diese Weise eine ganzheitliche Betrachtung des Themas erlaubt.
Die detaillierte Analyse der allgemeinen Entwicklungen und der speziellen Umsetzung am heutigen Gymnasium Stift Keppel wurde in den vorigen Kapitel vorgenommen. Als zusammenfassender Überblick soll dieses Kapitel ein Schlaglicht auf die Anwendungsorientierung im Sinne von Modellbildung vor dem Hintergrung des Allgemeinbildungsgedankens werfen. Zum Abschluss soll der Schritt von der Vergangenheit über die Gegenwart zur Zukunft gewagt werden.

5.1. Überblick: Anwendungsorientierung und Modellbildung vor dem Hintergrund des Allgemeinbildungsgedankens

Die beiden in → *Kapitel 2.1.2* genannten Grunderfahrungen (1) und (3) weisen schon darauf hin, dass die Schulmathematik nicht starr in ihrem eigenen Formelgerüst hängen bleiben darf, sondern dass sie einen Zweck erfüllen kann, der die Verbindung zum Außermathematischen schafft. Das verbindende Element zwischen Mathematik und Außermathematischem (d. h. der Realität bzw. der Gesellschaft) ist die Modellbildung, zu deren Entwicklung die „Betonung heuristischer Denk- und Arbeitsweisen“ (wie es in der ebd. zitierten L3 heißt) wesentliches Merkmal des Unterrichts sein sollte.
Die drei Schritte eines solchen Modellbildungsprozesses benennt Frank Förster in U.-P. TIETZE et al. (^{2}2002):
Schritt 1: Schaffung eines Realmodells;
Schritt 2: Mathematisierung des Realmodells;
Schritt 3: Erarbeitung einer mathematischen Lösung;
Schritt 4: Intrepretation der mathemat. Lösung und Validierung des Modells;

Schritt 5: Veränderung des Modells.

Dass bei der Schaffung des Realmodells idealisierende Eingriffe – v. a. im schulischen Kontext – notwendig sind, darauf geht Förster ein.[258] Ich möchte vor dem Hintergrund der historischen Entwicklung von Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht einen weiteren Aspekt hinzufügen: Von welchem Ausgangspunkt geht die „Schaffung eines Realmodells" aus? Es gibt zwei grundsätzliche Möglichkeiten:

1. Die mathematische Lösung ist der Ausgangspunkt. D. h. es wird ein Realmodell gesucht, das zur „Veranschaulichung" einer bestimmten mathematischen Methode geeignet ist. Dieses Realmodell kann dann sehr oberflächlich ausfallen und stellt nur noch eine „Einkleidung" der mathematischen Methode dar. In diesem Fall kann man von einer „eingekleideten Aufgabe" sprechen.

2. Die Realität ist der Ausgangspunkt. Dann ist das Modell ein echtes Realmodell. Bei einer strengen Durchführung dieser Richtung ist die Modellbildung im Unterricht kaum einsetzbar, weil das Realmodell zunächst (vor Anwendung des 2. Schritts) ja noch nicht „verrät", mit welcher mathematischen Methode es bearbeitet werden kann. Eine nachträgliche Idealisierung im Rahmen des 2. Schrittes ist i. d. R. notwendig.

Fall 2 möchte ich als Idealfall des Modellbildungsprozesses bezeichnen. Für den Unterricht ist eine ausgewogene Verteilung zwischen den beiden beschriebenen Fällen wohl das Beste. „Anwendungsorientierung" im eigentlichen Wortsinne geht ja auch von der Mathematik aus, die sich an der Anwendung orientiert – anders gesagt: es wird eine Anwendung gesucht, an der sich die Mathematik orientieren kann.

Diese Überlegungen mögen helfen, um die Formen der Anwendungsorientierung in ihrer historischen Entwicklung zu verfolgen. Diese Entwicklung hat Frank Förster[259] ausführlich erläutert. Dabei sind „deutliche Wellenbewegungen [zu erkennen], die den Anwendungsaspekt jeweils forcierten oder zurückdrängten"[260]. Der Vergleich mit den Ergebnissen der vorigen Kapitel vermag diese „Wellenbewegungen" zu bestätigen.

Dazu habe ich in Abbildung 2 ein Diagramm erstellt, das die anteilige Verteilung der eingekleideten/anwendungsorientierten und der rein mathematischen Aufgaben abhängig von den Jahren darstellt.

---

258 U.-P. Tietze et al. (²2002), S. 121.
259 Ebd., S. 128ff.
260 U.-P. Tietze et al. (²2002), S. 128.

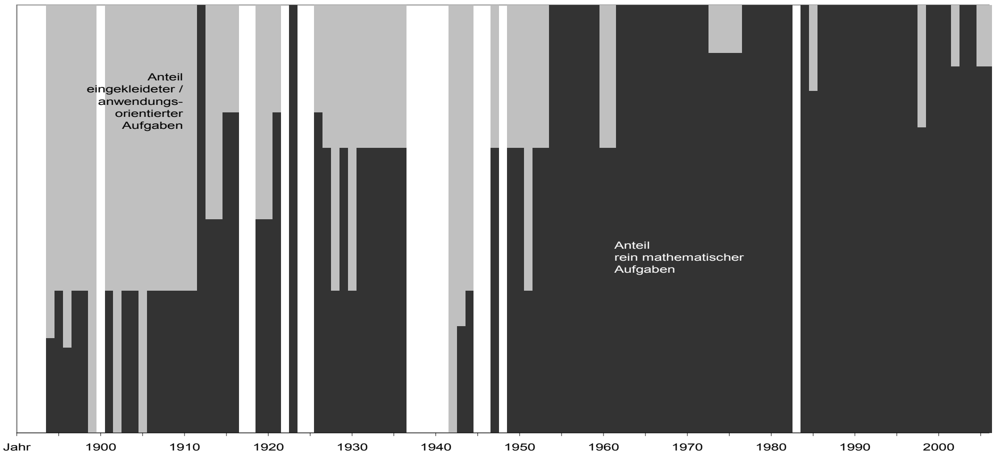


Abb. 2 Anwendungsorientierung in den Abiturarbeiten von Stift Keppel

Diese Darstellung ist allerdings mit äußerster Vorsicht zu behandeln, da nicht immer eindeutig zugeordnet werden kann, ob eine Aufgabe „anwendungsorientiert" ist oder nicht (z. B. die „Urnen"-Aufgaben der Stochastik). Vielmehr sollen hiermit großräumigere Tendenzen angezeigt werden. Und diese lassen sich – in Bezug gesetzt zu den allgemeinen „Wellenbewegungen" – wie folgt beschreiben:

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts trat ein „erste[s] Zurückdrängen von Anwendungsaspekten aus dem MU"[261] auf. Diese Tendenz ist aus Abb. 2 nicht zu erkennen, da die Lehrerinnenprüfungen in Stift Keppel bis 1911 anderen Bildungszielen Rechnung zu tragen hatten als das Abitur; der Vergleich mit den Feststellungen zur MARTUSschen Abituraufgabensammlung unterstützt die Aussage Försters (→ *Kapitel 3.2.1*).

Ein deutlicher Anstieg rein mathematischer Aufgaben ist nach Einführung des Abiturs in Stift Keppel zu erkennen. Der Anteil anwendungsorientierter Aufgaben lag in den Folgejahren im Schnitt etwas unter 50 %, doch nach Einführung der neuen Lehrpläne 1925 waren Anwendungsaspekte offenbar fester Bestandteil der Keppelschen Abituraufgaben. Dies entspricht den Forderungen der Meraner Pläne nach „noch stärkere[r] Berücksichtigung des ‚Wirklichkeitswertes' der Mathematik"[262]. Sicherlich entsprach der Anteil der Anwendungsorientierung nicht den ursprünglichen Intentionen der Meraner Pläner unter Federführung Walther Lietzmanns,[263] stellten die 1925 erschienenen Lehrpläne doch eine „deutliche Reduktion von Anwendungshinweisen" gegenüber den Ansätzen des DAMNU dar.[264]

261 Ebd., S. 128.
262 Ebd. S. 128.
263 Siehe dazu auch G. KAISER (1985).
264 Vgl. U.-P. TIETZE (^{2}2002), S. 129.

Der deutlich hohe Anteil anwendungsbezogener Aufgaben zur Kriegszeit in Stift Keppel ist in Verbindung mit der NS-ideologisch bedingten Reduktion des Mathematikgehalts besonders an Mädchenschulen zu begründen (vgl. u. a. →*Kapitel 2.2.6*). Die Bestrebungen der Neuen Mathematik werden ab Ende der 1950er Jahre mit einem sehr hohen Anteil (in den meisten Jahren 100 %) der reinen Mathematik deutlich. Förster formuliert: „In den deutschen Gymnasien etablierte sich weitgehend die Aufgabendidaktik des MU".[265]

Dass die Graphik für die letzten Jahre wieder anwendungsorientierte Aufgaben anzeigt, ist nur durch die wenigen Stochastik-Aufgaben zu begründen, die Anwendungsbezüge stärker fordern als Aufgaben aus der Analysis oder der Linearen Algebra. Darin zeigt sich, dass die deutliche Forderung nach Anwendungsorientierung in den letzten Jahrzehnten – spätestens durch die Lehrpläne von 1999 verankert – in den Schulen (hier speziell Stift Keppel) noch nicht angekommen ist.

Wenn man den von Förster beschriebenen „Wellenbewegungen" folgt, so befinden wir uns aktuell auf einem „Hochpunkt" der Anwendungsorietierung bzw. auf dem Weg dorthin. Dass nach dem „Hochpunkt" nicht wieder der Abfall droht, bleibt zu hoffen. Denn nur mithilfe der Anwendungsorientierung im Sinne modellbildender Aktivitäten (und nicht im Sinne von „Einkleidung") kann die (wissenschaftliche) Mathematik in der Schule Erfolg finden. In diesem Sinne ist der Hinweis von DANCKWERTS und VOGEL zu verstehen:

> „Der entscheidende Punkt ist: *Erst in der expliziten wechselseitigen Integration aller drei Grunderfahrungen kann der Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe seine spezifisch bildende Kraft entfalten.* Dies ist die mathematikdidaktische Position als Antwort auf den Bildungsauftrag der gymnasialen Oberstufe, der nach breitem Konsens darin besteht, vertiefte Allgemeinbildung, Wissenschaftspropädeutik und Studierfähigkeit zu verbinden."[266]

Der Rückblick auf die Vergangenheit des Abiturs in Mathematik zeigte uns die hierin genannten Aspekte „vertiefte Allgemeinbildung", „Wissenschaftspropädeutik" und „Studierfähigkeit" als einzelne Ausrichtungspunkte der Schulmathematik. Die Aufgabe der Zukunft wird es sein, diese drei Aspekte miteinander zu verbinden.

5.2. Ausblick: Das Zentralabitur

Um die soeben genannte Verbindung der drei Aspekte des Mathematikunterrichts zu erreichen, bedarf es auch einer entsprechenden Gestaltung von Prüfungsaufgaben, speziell im Abitur. Schöne Beispiele dafür, wie auch „Stan-

[265] Ebd., S. 129.
[266] R. DANCKERWERTS / D. VOGEL (2006), S. 7.

dardaufgaben“ aus der Praxis zu interessanten Fragestellungen mit Anwendungsorientierung verwandelt werden können, zeigen z. B. DANCKWERTS und VOGEL.[267]

Auch die Aufgaben des Zentralabiturs, das ab 2007 in Nordrhein-Westfalen durchgeführt werden soll, sind in diesem Sinne formuliert und betonen deutlich die Wichtigkeit der anwendungsbezogenen, realitätserfassenden Komponente der Mathematik. Das Internetangebot „www.learn-line.nrw.de“ stellt bereits Hinweise zur Gesaltung des Zentralabiturs und Beispielaufgaben zur Verfügung, anhand derer man schon jetzt ein Bild der zukünftigen Abiturgestaltung erkennen kann.[268]

Die entsprechenden Dokumente sind auf der dieser Arbeit beigefügten CD-ROM enthalten. Die darin enthaltenen Teilaufgaben seien hier kurz charakterisiert:

<u>Grundkurs</u>

Aufgabe I: Kurvendiskussion in Zusammenhang mit der Anrufrate bei einem Spendenaufruf im Fernsehen;

Aufgabe II: Stochastik-Aufgabe in Bezug auf Passagierauslastung einer Fluggesellschaft.

<u>Leistungskurs</u>

Aufgabe I: Kurvendiskussion am Beispiel des Tumorwachstums;

Aufgabe II: Lineare Algebra in Anwendung der Berechnung von Kristallschliffen;

Aufgabe III: Stochastik (erweiterte „Urnen-Aufgabe“).

<u>Leistungskurs (CAS-Aufgaben)</u>

Aufgabe I: Analytische Untersuchung zugunsten der grafischen Gestaltung eines Brachiosauriers (Verbindung Mathematik und Palöontologie);

Aufgabe II: Aufgabe aus der Linearen Algebra zur Kundenverteilung zweischen Supermärkten unter Verwendung von Übergangsmatrizen;

Aufgabe III: Stochastische Berechnungen zum Losverkauf bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung.

Diese Zusammenstellung zeigt, dass Mathematikaufgaben durchaus auf sehr sinnvolle Art und Weise mit außermathematischen Fragestellungen in Verbindung gebracht werden können. Erst dadurch erlangt das Ziel des Mathematikunterrichts in der Schule eine nachhaltige Definition. Dass moderne Compu-

[267] Vgl. R. DANCKWERTS / D. VOGEL (2006), S. 147ff in Bezug auf eine Zukunft der Kurvendiskussion.

[268] http://www.learn-line.nrw.de/angebote/abitur-gost-07/fach.php?fach=2 (02.05.2006).

ter-Algebra-Systeme (CAS) dazu durchaus hilfreich sind und zudem eine weitere Anknüpfung zur realen Anwendung von Mathematik darstellen, zeigen die drei oben genannten CAS-Aufgaben für den Leistungskurs. Damit ist endgültig der „Rechenunterricht“ überwunden – und zwar:

nicht in zweidimensionaler Richtung, vom Rechnen zur wissenschaftlichen Mathematik (wohin es in der Geschichte mehrmals, besonders deutlich in den 1960er/70er Jahren tendierte),

sondern mit dem Schritt in die „dritte Dimension“ unter Einbeziehung der „Wirklichkeit“: vom Rechnen zur angewandten höheren Mathematik, die in ihrer Fähigkeit der Wirklichkeitserfassung den wesentlichen Beitrag zur Allgemeinbildung leistet.

In diesem Sinne ist der Mathematikdidaktik für die Zukunft zu wünschen, dass es ihr gelingt, die drei o. g. Aspekte der vertieften Allgemeinbildung, der Wissenschaftspropädeutik und der Studierfähigkeit nachhaltig zu vereinen, und dass die Anwendung der Mathematik nicht nur im Dienste der *Mathematik*, sondern auch – und das in besonderer Weise – im Dienste der *Anwendung* steht!

Literatur

ARZT, Kurt / KÖHNLEIN, Norbert (1974): *Mathematische Reifeprüfungsaufgaben III*. Die in Baden-Württemberg in den Jahren 1966 bis 1973 zentral und an Versuchsschulen gestellten Aufgaben mit ihren Lösungen. Stuttgart.

ATHEN, Hermann (1977): *Mathematik, Geschichte*. In: Ders. et al. (Hg.): Lexikon der Schulmathematik und angrenzender Gebiete. Bd. 3 (L bis R). Köln. S. 626–627.

BORNELEIT, Peter et al. [DANCKWERTS, Rainer / HENN, Hans-Wolfgang / WEIGAND, Hans-Georg] (2001): *Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe*. In: Tenorth, Heinz-Elmar (Hg.): Kerncurriculum Oberstufe. Mathematik – Deutsch – Englisch. Weinheim/Basel.

Curriculum (1972). Gymnasiale Oberstufe. Mathematik. (Schulreform NW Sekundarstufe II. Arbeitsmaterialen und Berichte. Eine Schriftenreihe des Kultusministers des Landes Nordrhein-Westfalen). Krefeld.

DAMEROW, Peter (1984): *Mathematikunterricht und Gesellschaft*. In: Heymann, Hans Werner (Hg.): Mathematikunterricht zwischen Tradition und neuen Impulsen. Köln.

DANCKWERTS, Rainer / VOGEL, Dankwart (2006): Analysis verständlich unterrichten. München.

DÖRPINGHAUS, Andreas et al. [HELMER, Karl / HERCHERT, Gaby] (2004): *Lehrplan*. In: Benner, Dietrich / Oelkers, Jürgen (Hg.): Historisches Wörterbuch der Pädagogik. Weinheim/Basel. S. 567–602.

Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen (1968). Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968. Sonderdruck. o. O.

FLENDER, Heinz / HARTNACK, Wilhelm (1961): *Stift Keppel im Siegerlande 1239 bis 1951*. Bd. III: Matrikeln und Übersichten zu Band I und II. Stift Keppel.

FLESSAU, Kurt-Ingo (1977): *Schule und Diktatur*. Lehrpläne und Schulbücher des Nationalsozialismus. München.

FÜHRER, Lutz (1998): *Mathematikunterricht nach dem 7. Schuljahr – warum eigentlich für alle?* In: Neue Sammlung 38/4, S. 489–511.

GRUNDEL, Friedrich (1928): Die Mathematik an den deutschen höheren Schulen. Bd. 1 von der Zeit Karls des Großen bis zum Ende des 17. Jahrhunderts. Leipzig.

HARDER, Wolfgang (1983): *Abitur*. In: Enzyklopädie Erziehungswissenschaft. Handbuch und Lexikon der Erziehung in 11 Bänden und einem Registerband. Bd. 9: Sekundarstufe II – Jugendbildung zwischen Schule und Beruf, Teil 2. Stuttgart. S. 15–19.

HARTNACK, Wilhelm / FREIIN VON BREDOW, Juliane (1971): *Stift Keppel im Siegerlande 1239 bis 1951*. Bd. II: Geschichte der Schule und des Internats 1871–1971. Stift Keppel.

HEYMANN, Hans Werner (1996): *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim/Basel.

HOPMANN, Stefan (1988): *Lehrplanarbeit als Verwaltungshandeln*. Phil. Diss. Kiel.

ISENBERG, Erwin (1989): *Schulische Einrichtungen vor 1871*. Vom „Collegium virginum nobilium“ zur „Mäckesschule“. In: 750 Jahre Stift Keppel 1239–1989. Beiträge zur Geschichte und Gegenwart. (Hg. von Erwin Isenberg et. al). Stift Keppel.

JEHMLICH, Dorothea (1992): *Stift Keppel: Mädchenbildung im Klostergemäuer*. In: Reimers, Edgar (Hg.): Zur Geschichte der Schulen im Siegerland. Essen. (Gekürzte und überarbeitete Fassung 2001: http://www.stiftkeppel.de/stift/artikel/nazi_zt.htm).

JEISMANN, Karl-Ernst (1974): *Das preußische Gymnasium in Staat und Gesellschaft*. Die Entstehung des Gymnasiums als Schule des Staates und der Gebildeten, 1787–1817. Stuttgart.

JEISMANN, Karl-Ernst (1996): *Das preußische Gymnasium in Staat und Gesellschaft*. Bd. 2: Höhere Bildung zwischen Reform und Reaktion 1817–1859. [Bd. 1 ist vollständig überarbeitete Auflage von K.-E. Jeismann 1974]. Stuttgart.

KAISER, Gabriele (1985): *Die Bedeutung von Anwendungen in der Lietzmann'schen Didaktik* (Kurzfassung). In: Hans-Georg Steiner / Heinrich Winter (Hg.): Mathematikdidaktik. Bildungsgeschichte. Wissenschaftsgeschichte. (Bd. 12 der IDM-Reihe: Untersuchungen zum Mathematikunterricht). Köln.

KAMP, Norbert (1988): *Das Abiturreglement von 1788*. Zur Diskrepanz von Schulverwaltungsanspruch und Wirklichkeit. Phil. Diss. Essen.

KASTEN, I. (2000): *Neue Richtlinien – Mathematik für das nächste Jahrtausend? Eine vergleichende Betrachtung der gymnasialen Richtlinien und Lehrpläne des Landes Nordrhein-Westfalen von 1952–1999*. (Mathe-Treff: 7. MATHE-Chat am 11. April 2000 von 14.30 bis 17.30 Uhr). Online: http://

www2.bezreg-duesseldorf.nrw.de/schule/mathe/chat/chat7/kasten.htm (02.05.2006).

LAURIEN, Hanna-Renate (1974): *Reifeprüfung*. In: Lexikon der Pädagogik. Neue Ausgabe. Bd. 3. Freiburg/Basel/Wien. S. 403–404.

Dies. (1998): *Abitur – eine endlose Geschichte*. In: Einheit in der Vielfalt. 50 Jahre Kultusministerkonferenz 1948–1998. Neuwied/Kriftel/Berlin.

LEXIS, Wilhelm (Hg.) (1904): *Das Unterrichtswesen im Deutschen Reich*. Bd. 2: Die höheren Lehranstalten und das Mädchenschulwesen im Deutschen Reich. Berlin.

LIETZMANN, Walther (^{2}1926): *Methodik des mathematischen Unterrichts*. 1. Teil: Organisation, Allgemeine Methode und Technik des Unterrichts. (Handbuch des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts Bd. VII, 1. Teil). Leipzig.

LIETZMANN, Walther / GRAF, Ulrich (1941): *Mathematik in Erziehung und Unterricht*. 1. Bd.: Ziel und Weg. Leipzig.

LUDWIG, Emil / STELZIG, Hermann (1930): *Methodisch geordnete Aufgabensammlung mit Übungstafeln und Reifeprüfungsaufgaben aus der darstellenden Geometrie* […]. Wien.

MARTUS, Hermann Bd. 1 (^{10}1897) und (^{11}1903), Bd. 3 (^{1}1901), Bd. 4 (^{2}1906): *Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den höheren Lehranstalten*. Dresden/Leipzig.

MAST, Peter (1989): *Preußische Schulreform zwischen politischer Restauration und wirtschaftlicher Notwendigkeit 1817–1837*. Zur Bildungspolitik unter Minister von Altenstein und Johannes Schulze. In: Jeismann, Karl-Ernst (Hg.): Bildung, Staat und Gesellschaft im 19. Jahrhundert. Mobilisierung und Disziplinierung. Stuttgart.

Meyers großes Taschenlexikon in 24 Bänden, Bd. 23 (^{4}1992). Mannheim. S. 24 (Artikel „Unterricht").

MITSCHKA, Arno (1974): *Mathematikunterricht*. In: Lexikon der Pädagogik. Neue Ausgabe. Bd. 3. Freiburg/Basel/Wien, S. 143–147.

MSWWF [Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen] (1999): *Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II – Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen*. Mathematik. (Schriftenreihe Schule in NRW Nr. 4720). Frechen.

NEIGEBAUR, Johann Daniel Ferdinand (1988): *Sammlung der auf den Oeffentlichen Unterricht in den Königl. Preußischen Staaten sich beziehen-*

den Gesetze und Verordnungen [1826]. Nachdruck mit einer Einleitung hg. von Wolfgang Neugebauer. Köln/Wien.

NYSSEN, Elke (1979): *Schule im Nationalsozialismus*. Heidelberg.

PECKHAUS, Volker (2001): *Der nationalsozialistische „neue Begriff" von Wissenschaft am Beispiel der „Deutschen Mathematik" – Programm, Konzeption und politische Realisierung*. Mag.-Arbeit [1984]. Online-Version 2001: http://www-fakkw.uni-paderborn.de/institute/philosophie/peckhaus/ns/… (22.04.2006).

Richtlinien für den Unterricht in der Höheren Schule (1963). Mathematik. (Die Schule in Nordrhein-Westfalen. Eine Schriftenreihe des Kultusministeriums. Heft 8). Ratingen.

Richtlinien für den Unterricht in Mathematik und Physik an Gymnasien im Lande Nordrhein-Westfalen (1952). Düsseldorf.

Richtlinien für die gymnasiale Oberstufe in Nordrhein-Westfalen (1981). Mathematik. (Hg.: Der Kultusminister des Landes Nordrhein-Westfalen). Köln.

RÖNNE, Ludwig von (1855): *Das Unterrichts-Wesen des Preußischen Staates*, Bd. 2: Höhere Schulen, Universitäten, Sonstige Kultur-Anstalten. Berlin.

SCHUBERTH, Ernst (1971): *Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts*. Ihre Geschichte und Probleme unter besonderer Berücksichtigung von Felix Klein, Martin Wagenschein und Alexander Israel Wittenberg. Phil. Diss. Stuttgart.

SCHUBRING, Gert (1977): *Dokumentation der Mathematik-Lehrpläne in der Bundesrepublik Deutschland*. Schriftenreihe des IDM 12/1977. Bielefeld.

Ders. (1978): *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Stuttgart.

Ders. (1983): *Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jahrhundert*. Studien und Materialien zum Prozeß der Professionalisierung in Preußen (1810–1870). Weinheim/Basel.

Ders. (1986): *Dokumentation der Mathematik-Lehrpläne in der Bundesrepublik Deutschland (IV)*. Schriftenreihe des IDM 33/1986. Bielefeld.

Ders. (1989): *Die Mathematik – ein Hauptfach in der Auseinandersetzung zwischen Gymnasien und Realschulen in den deutschen Staaten des 19. Jahrhunderts*. In: Jeismann, Karl-Ernst (Hg.): Bildung, Staat und Gesellschaft im 19. Jahrhundert. Mobilisierung und Disziplinierung. Stuttgart.

SCHWEIM, Lothar (1966): *Schulreform in Preußen 1809–1819*. Entwürfe und Gutachten. (Reihe: Kleine Pädagogische Texte, Bd. 30). Weinheim/Bergstr.

SIMON, Max (^{2}1908): *Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik*. München.

TIETZE, Uwe-Peter et al. [KLIKA, Manfred / WOLPERS, Hans] (Hg.) (²2002): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Bd. 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. Braunschweig/Wiesbaden.

ULSHÖFER, Klaus (⁴1987): *Mathematische Abituraufgaben Grundkurs 1974–1987*. Stuttgart.

WAGNER, Heinrich Josef (Hg.) (1983): *Leistungskurs Mathematik. Abitur-Prüfungsaufgaben Gymnasium NRW*. Freising.

WIESE, Ludwig (1864): *Das höhere Schulwesen in Preußen*. Historisch-statistische Darstellung […]. Berlin.

Ders. (1886): *Verordnungen und Gesetze für die höheren Schulen in Preußen*. Erste Abteilung: Die Schule. Berlin.

Ders. (1902): *Das höhere Schulwesen in Preußen*. Historisch-statistische Darstellung […]. Bd. 4 umfassend die Zeit von 1874–1901 (1902). (Hg. von B. Irmer). Berlin.

WINKELMANN, Bernard (1977): *Tendenzen und Probleme in der curricularen Entwicklung des Mathematikunterrichts in der S II*. (Unter Mitarbeit von Helmut Luschberger). In: Übersicht zum Stand der Neugestaltung der gymnasialen Oberstufe im Mathematikunterricht in den Bundesländern. Schriftenreihe des IDM 8/1977. Bielefeld.

WINTER, Heinrich (1995): *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, S. 37–46.

WOLTER, Andrä (1989): *Von der Elitenbildung zur Bildungsexpansion: Zweihundert Jahre Abitur (1788-1988)*. Oldenburger Universitätsreden Nr. 28. Oldenburg. Online: http://www.bis.uni-oldenburg.de/bisverlag/unireden/ur28/dokument.pdf (27.04.2006).

750 Jahre Stift Keppel 1239–1989 (1989). Beiträge zur Geschichte und Gegenwart. (Hg. von Erwin Isenberg et. al). Stift Keppel.

Abbildungsnachweise:

Abb. 1: http://www2.bezreg-duesseldorf.nrw.de/schule/mathe/chat/chat7/kasten.gif (02.05.2006)

Abb. 2: Gabriel Isenberg

Die Zeichnungen in Anhang 1 sind den entsprechenden Abiturvorschlägen des Schularchivs Stift Keppel entnommen.

A. Lehrerinnenprüfungen 1894 bis 1912

A.1 ohne Datum (Mai 1894 ?)

1. B. kauft 4 Stücke Leinwand, eines ist immer 3 m länger als das andere; er bezahlt für 1 m 0,75 ℳ, zusammen 127,50 ℳ. a) wieviel Meter enthalten alle 4 Stücke? b) wieviel jedes? c) wieviel kostet jedes Stück?
2. N. verkauft 1 hℓ Getreide für 8,10 ℳ und gewinnt $^1/_5$ des Einkaufspreises; wie teuer ist 1 hℓ im Einkauf?
3. Welche Summe müßte A. sogleich anlegen, wenn er in 10 Jahren bei 5 % jährlicher Zinsen an Kapital und Zinsen wollte 1000 ℳ gespart haben?
4. Der Fußboden einer Kirche ist 18 m breit und 30 m lang; er soll mit Fließen belegt werden, welche 0,30 m lang und breit sind; wieviel Fliesen sind erforderlich?
5. Welche Zahl giebt, ins Quadrat erhoben, 16.24?
6. Eine Schulklasse bestand aus 4 Abteilungen. Davon enthält die erste $^1/_4$, die zweite $^1/_5$, die dritte so viele, wie die erste u. zweite zusammen, und die vierte zählte 18 Schüler; wie stark war die ganze Schule?

Aufgabenstellung: Pfarrer Hugo Roenneke.
Datum: nicht angegeben. Die archivierte Schülerarbeit ist von Bertha Streng. Über ihre Verweildauer in Stift Keppel macht FLENDER/HARTNACK keine Angaben, so dass daraus auch keine Rückschlüsse auf das Jahr gezogen werden können.

A.2 Oktober 1894

1. Hebel erzählt: Der Teufel verspricht einem Müßiggänger all sein Geld zu verdoppeln, so oft er über eine Brücke geht unter der Bedingung, daß er beim Rückgang 24 Kreuzer in den Strom wirft. Nach dreimaligem Hin- und Hergehen ist sein Geld zu Ende. Wieviel hatte er zu Anfang?
2. Aus 3 Sorten à ℳ 1,50, ℳ 1,80 und ℳ 2,10 soll eine Sorte zu 2 ℳ gemischt werden. Wieviel kg jeder Sorte erfordern 100 kg Mischung, wenn von den beiden ersten Sorten gleichviel genommen wird?
3. Eine Kugel hat 10 m Durchmesser u. 10 m Höhe. Wie groß ist die Oberfläche?

Aufgabenstellung: Pfarrer Hugo Roenneke.
Datum: 04.10.1894.

A.3 Mai 1895

1. Großvater und Großmutter sind zusammen 135 Jahre alt, Großvater und Vater 110, Großmutter und Vater 105, Vater und Mutter 72, Mutter und Tochter 42, Tochter und Sohn 18, wie alt ist jeder?

2. Für welche Summe ist auf 30 Tage zu 5 % ein Diskont von 3 ℳ bewilligt worden?
3. Aus einem Quadrat ist ein kleines herausgeschnitten. Der übrigbleibende Rand enthält 224 qm. Wie lang ist jedes der beiden Quadrate, wenn sich die Seiten wie 5 zu 9 verhalten?

Aufgabenstellung: Pfarrer Hugo Roenneke.
Datum: 15.05.1895.

A.4 Oktober 1895

1. Eine Erbschaft von 9000 ℳ soll unter 4 Personen so verteilt werden, daß A. $^1/_3$ B. $^1/_4$ C. $^1/_5$ und D. den Rest erhält; gleich nach der Teilung stirbt B., und die übrigen teilen nun noch den Anteil des B. im Verhältnis ihrer Teile. Wieviel erhält jeder?
2. Ein Landmann versendet 3 Faß Butter, welche ein Bruttogewicht von 25,2 kg, 28,6 kg und 25,8 kg haben; es gehen dann $16^2/_3$ % Tara ab. Wieviel kostet die Butter, wenn 1 kg Netto mit 2,50 ℳ (verkauft) berechnet wird?
3. Die Oberfläche einer Kugel beträgt 3,5 qm. Wie groß ist ihr Inhalt?

Aufgabenstellung: Pfarrer Hugo Roenneke.
Datum: 01.10.1895.

A.5 Mai 1896

1. Ein Tintenfaß hat die Gestalt eines abgestumpften Kegels. Die Höhe beträgt 10 cm, der Durchmesser im Lichten von dem Boden 4 cm, und von dem oberen Rande 6 cm. Wie groß ist der Rauminhalt als abgekürzter Kegel berechnet?
2. Was wiegt eine Bleikugel von 2,8 cm Durchm., wenn Blei 11,4 x so schwer wie Wasser ist und 1 Liter Wasser ein Gewicht von 1 kg hat?
3. Ein Arbeiter hat bis zu seinem vollendeten 70. Lebensjahr 1532 Wochenbeiträge gezahlt, und zwar:

90	Wochenbeiträge	in	Lohnkasse	I.
137	"	"	"	II.
563	"	"	"	III.
742	"	"	"	IV.

   Welches Kapital würde zu $3^1/_3$ % die Zinsen bringen, die er jährlich als Altersrente erhält?

Aufgabenstellung: Pfarrer Hugo Roenneke.
Datum: 01.05.1896.

A.6 November 1896

1. In einem Kohlenbergwerke befanden sich 2 Dampfmaschinen. Die erste M. brachte in 5 Stunden 2880 Lt. auf eine Höhe von 125 m. Die zweite M. in 3 Std. 1600 Lt. auf eine H. von 180 m. Nun fand es sich, daß nachdem die Erste $1^3/_4$ Std. gearbeitet hatte, ehe die Zweite anfing, diese doch nach 7 Std. 225 Lt. mehr lieferte, als jene. Aus welcher Tiefe werden die Kohlen gefördert?
2. 4 Händler kauften zusammen für 4623 ℳ Roggen, den Scheffel zu 5,75 ℳ. C. erhielt 112 Scheffel mehr als A. der selbst 60 Scheffel weniger als G bekam. B mußte 529 ℳ mehr als G bezahlen. Wieviel hatte jeder zu bezahlen?

Aufgabenstellung: Pfarrer Hugo Roenneke.
Datum: 12.11.1896.

A.7 Ostern 1897

1. 4 Kisten Havannacigarren haben ein Bruttogewicht von 1465 ℔, Tara für jede Kiste 60 ℔, Gutgewicht $^3/_4$ % vom Brutto und in ganzen Pfunden, Beschädigung für jede Kiste 5 ℔. Wieviel ist zu zahlen, wenn ein ℔ Netto mit 45 Pf berechnet wird und 10 % Rabatt auf 100 gegeben werden?
2. Jemand versichert 2 Häuser und zwar das eine mit $^3/_8$ % und das andere mit $^1/_5$ % der Versicherungssumme; die jährliche Prämie beträgt für beide 194,40 ℳ. Sie würde jedoch nur 171,30 ℳ betragen, wenn er umgekehrt das erste mit $^1/_5$ % und das andere mit $^3/_8$ % hätte versichern müssen. Wie hoch ist jedes Haus gerechnet?
3. Ein Weinfaß ist 0,96 m lang; der Durchmesser der Bodenfläche beträgt 0,46 m und die Spundtiefe 0,72 m. Wieviel Wein faßt das Faß?

Aufgabenstellung: Pfarrer Hugo Roenneke.
Datum: 02.04.1897.

A.8 Ostern 1898 ?

1. Ein Bauer hat zwei Tagelöhner, die für gleichen Lohn bei ihm arbeiten; dem einen giebt er einmal für 56 Tage 4 Scheffel Roggen + 42 ℳ, dem anderen für 84 Tage $7^1/_2$ Scheffel Roggen + 51 ℳ. Wie hoch ist der Scheffel Roggen gerechnet?
2. Ein Faß hat einen Spunddurchmesser von 60 cm, einen Bodendurchmesser von 45 cm und eine Länge von 90 cm. Wieviel ℓ faßt es?
3. Wieviel Zinsen bringen 768,75 ℳ zu 5 % vom 1. Januar bis zum 12. August? (Elementar und mit Hilfe der Zinszahl zu berechnen.)

Aufgabenstellung: ?
Datum: ?
Die archivierte Schülerarbeit ist von Helene Jung. Im Schülerinnenverzeichnis sind bei FLENDER/HARTNACK drei Schülerinnen mit dem Namen Helene Jung zwischen den Jahren 1896 und 1903 aufgeführt. Nur eine von ihnen dürfte einen Seminarabschluss gemacht haben, und zwar im Jahr 1898. Da für 1898 keine weiteren Prüfungsakten vorliegen, ist die Datierung dieser Arbeit auf 1898 anzunehmen.
Dieses Jahr fällt eigentlich in die Zeit des Lehrers Hugo Roenneke. Das Kürzel unter der Prüfungsnote ist allerdings als „Fr.“ zu lesen. Das Lehrerverzeichnis bei FLENDER/HARTNACK nennt keinen Namen, der diesem Kürzel für besagtes Jahr entsprechen könnte.

A.9 Ostern 1899

1. Eine Säule hat einen Fuß von Tufstein, der einen Würfel von 70 cm langen Kanten bildet. Die Säule selbst ist aus Marmor, hat einen Durchmesser von 50 cm und eine Höhe von 2 m. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Ganzen? (Tufstein 1,25; Marmor 2,75)
2. Wie schwer ist eine eiserne Hohlkugel von 20 cm innerem Durchmesser, wenn das Eisen 2 cm dick und das spez. Gewicht $7^4/_5$ ist?
3. Die Tara einer Ware beträgt, zu 3,75 % des Bruttogewichts berechnet 60,75 Pfd. Der Centner Netto kostet $48^3/_5$ ℳ, für den Centner Brutto wird 60 Pfd. Fracht gezahlt. Wie teuer ist die Ware?

Aufgabenstellung: Pfarrer Hugo Roenneke.
Datum: nicht angegeben. Die archivierte Schülerarbeit ist von Charlotte Pfeiffer, sie war bis 1899 in Stift Keppel.

Aus dem Jahr 1900 ist keine Arbeit vorhanden.

A.10 Ostern 1901

1. A gebraucht zu einer Arbeit 6 B 4 und C 3 Tage. In wieviel Tagen wird die Arbeit zustande kommen, wenn die 3 Arbeiter zusammen arbeiten?
2. Schließe ein Sparkassenbuch am 31. Dezember 1900 ab. Es sind eingelegt:
   45 ℳ am 31. Dezember 1899
   54 ℳ am 28. Februar 1900
   72 ℳ am 30. April 1900
   Der Zinsfuß ist $3^2/_3$ %.
3. Der Durchmesser eines Gasometers ist 7 m lang, seine Höhe beträgt 12 m. Wieviel cbm Gas faßt derselbe?

Aufgabenstellung: Seminar-Hilfslehrer Otto (?).
Datum: 25.03.1901.

A.11 Ostern 1902

1. In einem Garten soll ein Teich angelegt werden, der kreisrund und dessen Flächeninhalt 452,16 qm sein soll. Wie groß ist der Durchmesser?
2. Bei einem Unternehmen sind 4 Kaufleute beteiligt und zwar:
   A mit 2400 ℳ 5 Jahre,
   B mit 2700 ℳ 4 Jahre,
   C mit 900 ℳ 3 Jahre,
   D mit 1200 ℳ 2 Jahre.
   Wieviel beträgt der Gewinn eines jeden, wenn sich der Gesamtgewinn auf 13950 ℳ beläuft?
3. A braucht zu einer Arbeit 12 Tage, B 8 Tage, C 6 Tage.
   In wieviel Tagen kommt die Arbeit zustande, wenn A, B und C zusammen arbeiten?

Aufgabenstellung: Seminar-Hilfslehrer Otto.
Datum: nicht angegeben. Die archivierte Schülerarbeit ist von Hedwig Bertuch, sie war bis 1902 in Stift Keppel.

A.12 Ostern 1903

1. Vollmilch enthält:
   3,5 % Eiweiß, 3,5 % Fett, 4,5 % Stärkemehl.
   Magermilch enthält:
   3,4 % Eiweiß, 0,4 % Fett, 4,3 % Stärke.
   Wieviel g Nährstoffe erhält man dann für 3 ℳ, wenn man 1 ℓ Vollmilch mit 0,20 ℳ und 1 ℓ Magermilch mit 0,06 ℳ bezahlt?
2. Ein Quadrat und ein Rechteck haben je 42 m Umfang. Die anstoßenden Seiten des Rechtecks verhalten sich zu einander wie 3 : 4. Um wieviel qm ist der Inhalt des Quadrates größer als der Inhalt des Rechtecks?
3. Zu Ostern wurden aus einer Schule 10 % der Schüler entlassen, nach Ostern nahm man $16^2/_3$ % der zurückgebliebenen Schüler neu auf, und nun wurde die Schule von 630 Kindern besucht. Wieviel Kinder waren vor der Versetzung in der Schule?

Aufgabenstellung: Seminar-Hilfslehrer Otto (?).
Datum: 19.03.1903.

A.13 Ostern 1904

1. 560 ℳ bringen in $2^1/_2$ Jahren 70 ℳ Zinsen, wieviel Zinsen bringen bei gleichem Zinsfuß 480 ℳ in $3^1/_2$ Jahren?
2. Ein gleischschenkliges Dreieck zu konstruieren aus der Summe der drei Seiten und einem Winkel an der Grundlinie.

3. Der Kohlensäuregehalt frischer Luft beträgt 0,4 ‰. Ein 10jähriges Kind produziert in 1 Stunde 10,8 ℓ Kohlensäure. Wie oft muß die Luft in einer Stunde in einem Schulzimmer das 7,5 m lang, 6 m breit und 3,5 m hoch ist erneuert werden, wenn in demselben 35 10jährige Kinder unterrichtet werden und der Kohlensäuregehalt der Luft 1,2 ‰ nicht übersteigen soll?

Aufgabenstellung: Seminar-Hilfslehrer Otto.
Datum: 08.03.1904.

A.14 Ostern 1905

1. Jemand hatte 2 Kapitalien geliehen, 850 ℳ zu 5 % auf 6 Monate und 60 ℳ auf 4 Monate; an Kapital und Zinsen hatte er 1479,25 ℳ zurückbezahlt; wieviel % mußte er von dem 2. Kapital zahlen?
2. A. bestellt 400 kg einer Ware, das kg = 1,86 ℳ; der Kaufmann, der zu dem angegebenen Preise die Ware nicht vorrätig hat, will 2 andere Sorten, von denen 1 kg = 1,72 ℳ, bzw. 1,92 ℳ kostet, so mischen, daß er 1 kg dieser Mischung zu dem verlangten Preise abgeben kann; wieviel kg von jeder Sorte hatte er zu nehmen?
3. Ein Zuckerhut hat an der Grundfläche 62,8 cm Umfang und ist 40 cm hoch; wieviel wiegt der Zucker, wenn das spezifische Gewicht desselben 1,6 ist? ($\pi = 3{,}14$)

Aufgabenstellung: Seminar-Oberlehrer StR Beißenhirtz.
Datum: 22.03.1905.

A.15 Ostern 1906

1. Zwei Kaufleute A u. B. empfingen eine Ladung Kaffee, welche sie in der Weise teilten, daß A 720 ℳ mehr zu zahlen hatte, als B. Sie erhielten 3 Mon. Ziel, zahlten aber bar mit $^1/_2$ % monatl. Diskont zus. 4856,05 ℳ.
Für wiev. ℳ Kaffee hatte jeder eingekauft?
2. Ein Weinhändler soll ein Faß Wein von 72 ℓ zu 108 ℳ liefern. Er besitzt Weine, deren Preise im Einkauf 90 u. 140 ℳ für das hℓ waren. In welcher Weise muß er diese Sorten mischen, wenn er 20 % gewinnen will?
3. Ein dreieckiges Feld von 302 m Grundlinie u. einer Höhe von 351 m soll gegen ein quadratförmiges umgetauscht werden. Wie gr. muß d. Seite des Quadrats sein? (3 Dez.stellen)

Aufgabenstellung: Seminar-Oberlehrer StR Beißenhirtz.
Datum: 17.03.1906.

A.16 Ostern 1907

1. A und B haben für eine Warensendung zusammen 1250 ℳ zu zahlen. Sie haben 3 Mon. Ziel, zahlen aber bar mit 10 % jährlichem Diskont, und zwar beträgt die Barzahlung des A 507 ℳ.
   a) Für wieviel ℳ hatte A eingekauft?
   b) Wieviel ℳ betrug die Rechnugssumme und die Barzahlung des B?
2. Ein Weinhändler verkauft 120 ℓ Wein in 2 Fässern mit einem Verdienst von 20 % zu 134,82 ℳ. Im Einkauf kostete das ℓ des 1. Fasses 80 Pfg, das ℓ des 2. Fasses war 30 Pfg teurer. Wieviel ℓ enthielt jedes Faß?
3. Ein rechteckiges Grundstück von 72 m Länge und 54,08 m Breite soll gegen ein quadratförmiges umgetauscht werden.
   Wie lang ist die Seite des Quadrats?

Aufgabenstellung: Seminar-Übungsschullehrer Ernst Herbst.
Datum: 19.02.1907.

A.17 Ostern 1908

1. A., B. und C. haben zu einem gemeinsamen Geschäft 24000 ℳ zusammengelegt im Verhältnis von $1 : 1^1/_4 : 1^1/_2$. Ihr Gewinn beträgt 4851,25 ℳ, von welchem A. für die Geschäftsführung 4 % vorab bekommt.
   a) Wieviel erhält jeder vom Gewinn?
   b) Wieviel % haben B. und C. gewonnen?
2. Am 15. Febr. kauft jemand $3^1/_2$ % Staatspapiere, deren Nennwert 3000 ℳ beträgt zu einem Kurse von 92,80 ℳ mit den am 1. April fälligen halbjährigen Zinsscheinen.
   a) Wieviel mußte er für die Wertpapiere bezahlen?
   b) Wie hoch verzinste sich das darin angelegte Geld?
3. Der obere Durchmesser eines Wassereimers beträgt 32 cm, der untere 22 cm. Wieviel Liter Wasser vermag derselbe zu fassen, wenn die Höhe desselben 30 cm beträgt?

Aufgabenstellung: Seminar-Übungsschullehrer Ernst Herbst.
Datum: 24.03.1908.

A.18 Ostern 1909

1. Zwei Kaufleute, A u. B, beziehen zusammen für 6320 ℳ Ware, zahlbar nach 3 Monat mit 6 % jährlichem Diskont. Die Barzahlung des A beträgt 4491,60 ℳ. Für wieviel Mark hatte jeder eingekauft?
2. Eine Erbschaft von 10857 ℳ soll in der Weise unter 3 Personen verteilt werden, daß sich der Anteil des A zu dem des B verhält wie 2 : 3; die Anteile des B u. C stehen im Verhältnis von 4 : 5. Wieviel hat jeder geerbt?

3. Eine Gießkanne in Gestalt eines Cylinders hat einen Durchmesser von 24 cm und eine Höhe von 28 cm. Wie oft kann dieselbe aus einem Regenfaß gefüllt werden, das 1,52 hℓ Wasser enthält?

Aufgabenstellung: Seminar-Übungsschullehrer Ernst Herbst.
Datum: 23.03.1909.

A.19 Ostern 1910

1. Ein Kapitalist hat 2 Kapitalien ausgeliehen, von welchen das zweite um 430 ℳ größer ist als das erste. Die jährlichen Zinsen beider Kapitalien betragen 297,75 ℳ. Das erste Kapital ist zu $4^1/_5$ %, das zweite zu $4^1/_2$ % ausgeliehen. Wie groß war jedes der beiden?
2. Ein Landwirt würde mit seinem Hafervorrat seine Pferde eine bestimmte Zeit füttern können. Verkaufte er 1 Pferd, so würde er $1^1/_2$ Monat länger, kaufte er aber 1 Pferd dazu, so würde er 1 Monat weniger reichen. Wieviel Pferde hatte er, u. für wieviel Monat reichte das Futter für dieselben? (Algebraische Lösung.)
3. Ein Bauplatz hat die Gestalt eines Trapezes, dessen parallele Seiten 27 m und 21,40 m lang sind. Der Abstand der Parallelen beträgt 17,20 m. Welchen Wert hat das Grundstück, wenn ein gleichartiger Bauplatz von 110 qm für 286 ℳ verkauft wurde?

Aufgabenstellung: Seminar-Übungsschullehrer Ernst Herbst.
Datum: 01.02.1910.

A.20 Ostern 1911

1. Zu 45 ℓ Spiritus von 80 % werden 75 ℓ von 72 % und 30 ℓ von 55 % gegossen. Wieviel ℓ Wasser sind noch hinzuzugießen um eine Mischung von 60 % zu erhalten?
2. 25000 ℳ $3^1/_2$ % Staatspapiere werden im Kurs von 104,25 ℳ am 7. Februar mit dem Zinsscheine vom 1. Oktober gekauft.
   a. Wieviel beträgt die Zahlung?
   b. Zu wieviel % verzinst sich das angelegte Kapital?
3. An 2 gegebene Kreise die gemeinschaftliche äußere Tangente zu ziehen. [Lösung zeichnerisch mit Zirkel und Lineal + Konstruktionsbeschreibung]

Aufgabenstellung: Hilfslehrer StR S. Großmann (?).
Datum: 18.03.1911.

A.21 Ostern 1912

1. Eine Kraft R = 420 kg soll in 2 Seitenkräfte P = 367 kg und Q = 275 kg zerlegt werden. Unter welchen Winkeln gegen R greifen die Seitenkräfte?

2. Ein Pyramidenstumpf von der Höhe h = 2 m hat als Grundflächen gleichschenklige Dreiecke mit dem Winkel an der Grundlinie β = 21° 6' 45". Von der einen Grundfläche ist die Grundlinie a = 1,2 m, von der anderen der Schenkel b = 0,8 m gegeben. Wie groß ist der Rauminhalt des Stumpfes?
3. $3\sqrt{x+8} - \sqrt{x-8} = 2\sqrt{2x+2}$
4. Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von dem gegeben ist:
   $a^2 + b^2 = l^2$, m_c und h_c. (Analysis und Konstruktion)

Aufgabenstellung: Seminar-Oberlehrer StR Edmund Fischer.
Datum: 22.02.1912.

B. Eingeschränktes Mädchenabitur 1913 bis 1925

B.1 Reifeprüfung Ostern 1913

1. Um die Höhe eines der Türme des Kölner Domes zu bestimmen, hat man eine horizontale Standlinie $a = AB = 60$ m abgesteckt, deren Verlängerung durch den Fuß des Turmes geht, und in A und B die Erhebungswinkel $\alpha = 58° \; 11' \; 48''$ und $\beta = 76° \; 46' \; 31''$ gemessen. Wie hoch ist der Turm?
2. Um eine gerade, regelmäßige, achtseitige Pyramide mit der Höhe $h = 35{,}5$ cm und der Grundkante $a = 11{,}7$ cm ist ein Kegel beschrieben. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Kegels?
3. Von einem festen Punkte P nach einem Kreise eine Sekante so zu ziehen, daß das Rechteck aus dem äußeren Abschnitt und der Sehne gleich einem gegebenen Quadrat wird. (Analysis und Konstruktion).
4. Bei einem Konzert brachte der erste Platz dreimal soviel ein als der zweite. Die Karte für den ersten Platz war 1 $\mathcal{M}$ teurer als für den zweiten. Wieviel kostete die Eintrittskarte für jeden Platz, wenn zusammen 450 Karten für 1200 $\mathcal{M}$ verkauft wurden?

Aufgabenstellung: Seminar-Oberlehrer StR Edmund Fischer.
Datum: 15.02.1913.

B.2 Reifeprüfung Ostern 1914

1. Ein Dreieck zu berechnen aus $a = 75$ cm, $b = 29$ cm und $h_a = 14{,}56$ cm.
2. Ein elektrischer Konduktor hat die Form eines geraden $h = 20$ cm hohen Kreiszylinders, auf dessen Kreisflächen ein gerader Kegel von gleichseitigem Achsenschnitt, beziehungsweise eine Halbkugel, genau passend, aufgesetzt sind. Wie groß ist die Oberfläche des Konduktors, wenn der Kugelradius gleich dem halben maior der stetigen geteilten Zylinderhöhe ist?
3. $12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$.
4. Außerhalb eines festen Kreises einen Punkt P so zu bestimmen, daß sein Abstand vom Mittelpunkt die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und der Summe der beiden von dem Punkte P an den Kreis gezogenen Tangenten ist. (Analysis und Konstruktion).

Aufgabenstellung: Seminar-Oberlehrer StR Edmund Fischer.
Datum: 26.02.1914.

B.3 Reifeprüfung Ostern 1915 ?

1. Ein gerader Kegelstumpf aus Eisen vom spezifischen Gewicht 7,6 ist $h = 5{,}4$ cm hoch und wiegt 4500 g. Wie groß ist die Mantelfläche, wenn die Radien der beiden Grundkreise sich wie 1 : 2 verhalten?

2. Die Inhalte zweier Würfel unterscheiden sich um 1216 ccm, ihre Kanten um 4 cm. Wie groß sind die Kanten?
3. Ein Dreieck zu zeichnen aus $a - b$, p, q. (Analysis und Konstruktion)
4. In einem Bergwerk gehen von einem Punkte A aus zwei Stollen, von denen der eine AB = 1,4 km, der andere AC = 1,845 km lang ist. Ihre Richtungen bilden einen Winkel (von) BAC miteinander. $BAC = \alpha = 102° 48'$. Von B aus soll ein Verbindungsstollen nach C getrieben werden. Unter welchem Winkel ist der Stollen anzulegen und wie lang wird er?

Aufgabenstellung: Seminar-Oberlehrer StR Edmund Fischer.
Datum: 19.03.1915 ? [angegeben ist 1914].

B.4 Reifeprüfung Ostern 1916

1. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mißt 39 cm. Der Inhalt desselben beträgt 227 qcm. Wie lang sind die Katheten?
2. Zwei Kapitalien, von denen das erste 5000 ℳ größer ist als das zweite, stehen zu $3^1/_2$ % und zu 5 % auf Zinsen. Wie groß sind dieselben, wenn sie in 20 Jahren zu der gleichen Summe anwachsen?
3. Auf dem Abhange eines Berges steht ein Turm AB. Man mißt vom Fuße B desselben den Abhang hinab die a = 75 m lange Standlinie BC und in C den Winkel $BCA = \alpha = 30° 25' 20''$. Ferner von C aus in derselben Richtung weiter die b = 50,25 m lange Standlinie CD und in D den Winkel $BDA = \beta = 21° 20' 30''$. Wie hoch ist der Turm?
4. Eine regelmäßige sechseckige Pyramide mit der Grundkante a = 4 cm und der Höhe h = 7,5 cm ist in schiefer Parallelprojektion zu zeichnen. Berechne den Inhalt, die Oberfläche und den Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche.

Aufgabenstellung: Seminar-Oberlehrer StR Edmund Fischer.
Datum: 17.02.1916.

Aus den Jahren 1917 und 1918 sind keine Arbeiten vorhanden.

B.5 Reifeprüfung Ostern 1919

1. Ein gerader Kegelstumpf, in welchem der Radius der unteren Grundfläche 3 mal so groß ist wie der der oberen, hat die Höhe h = 7,65 cm und besitzt dasselbe Volumen wie eine Kugel, deren Radius ρ = 9,95 cm ist. Wie groß sind die Radien und der Mantel des Stumpfes?
2. Von einem Fesselballon aus erblickt man den Fußpunkt eines h = 31,5 m hohen Turmes unter dem Senkungswinkel $\alpha = 82° 45'$ und die Spitze des Turmes unter dem Senkungswinkel $\beta = 82° 10'$. Wie hoch schwebt der Ballon über der Ebene, auf der der Turm steht?

3. Jemand erbt ein Kapital, das zu 3 % auf Zinseszinsen ausgeliehen ist. Er nimmt davon am Ende eines jeden Jahres 2400 $\mathcal{M}$ und hat nach 10 Jahren noch 8700 $\mathcal{M}$ übrig. Wie groß war die Erbschaft?
4. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus p und $(q + h) = d$. (Analysis, Konstruktion und Determination.)

Aufgabenstellung: Seminar-Oberlehrer StR Edmund Fischer.
Datum: 13.02.1919.

B.6 Reifeprüfung Ostern 1920

1. Um eine Kugel, deren Radius $\rho = 3{,}45$ cm ist, ist ein Kegel gelegt, dessen Höhe $h = 10{,}37$ cm beträgt. Das Volumen und die Oberfläche des Kegels sind zu berechnen.
2. Auf dem Gipfel eines Berges steht ein $h = 50$ m hoher Turm. Man erblickt von der Ebene aus die Spitze des Turmes unter dem Erhebungswinkel $\delta = 58° 23'$ und den Fuß des Turmes unter dem Erhebungswinkel $\varepsilon = 55° 45'$. Wie hoch ist der Berg?
3. Wieviel bleibt von einer Schuld, welche heute 2500 Mark beträgt, nach 10 Jahren übrig, wenn am Schlusse jedes der 10 Jahre 120 Mark abgezahlt wurden? Zinsfuß 3 %.
4. Ein Dreieck zu zeichnen aus:
   $a : b = m : n$, p und q. (Analysis, Konstruktion und Determination.)

Aufgabenstellung: Seminar-Oberlehrer StR Edmund Fischer.
Datum: 26.02.1920.

B.7 Reifeprüfung Ostern 1921

1. Eine hölzerne Kugel mit dem Durchmesser $2r = 20$ cm sinkt in Wasser so weit ein, daß der herausragende Teil die Höhe $h = 2$ cm hat. Wie groß ist das spez. Gewicht der betreffenden Holzart? Wie groß ist die Kugelkappe des herausragenden Teiles?
2. Ein Dreieck zu berechnen aus: $\rho = 22{,}5$ cm; $a + b - c = 68$ cm; $\alpha - \beta = 46° 12' 45''$.
3. Eine Linse von 24 cm Brennweite erzeugt von einem leuchtenden Körper ein Bild, das sich von der Linse um 24 cm entfernt, wenn man den Körper der Linse um 12 cm nähert. Wie weit stehen der Körper und sein Bild von der Linse ab?
4. Ein Dreieck zu zeichnen aus:
   $a^2 + b^2 = d^2$; m_c; r. (Analysis; Konstruktion; Determination)

Aufgabenstellung: Seminar-Oberlehrer StR Edmund Fischer.
Datum: 10.02.1921.

1922 fand keine Reifeprüfung statt, da keine OL.I vorhanden war.

B.8 Reifeprüfung Ostern 1923

1. Drei trigonometrische Punkte *A*, *B* und *C* liegen in einer Ebene so, daß die Entfernung von *A* bis *B* 7,5 km, von *A* bis *C* 9,4 km und von *B* bis *C* 5,8 km beträgt. Auf der geradlinigen Verlängerung von *AB* über *B* hinaus liegt ein Punkt *D* so, daß von ihm aus die Entfernung von *B* bis *C* unter dem Gesichtswinkel $\delta = 12° \, 45'$ erscheint. Es sollen die Entfernungen des Punktes *D* von *A*, *B* u. *C* berechnet werden.
2. Die 5. Wurzeln aus der positiven Einheit zu bestimmen. [in $\mathbb{C}$].
3. Ein Kegel aus Holz vom spezifischen Gewicht $s = 0{,}84$, dessen Grundkreis den Radius $r = 5{,}78$ cm besitzt, wird so geschnitten, daß daraus eine regelmäßige sechsseitige Pyramide entsteht, deren Grundkante gleich dem Radius des Kegels ist. Die abgeschnittenen Späne wiegen $p = 78{,}26$ g. Wie hoch war der Kegel u. wie groß seine Mantelfläche?
4. Es soll ein Rechteck, von dem der Umfang $U = 2s$ gegeben ist, in einen Kreis gezeichnet werden. (Analysis, Konstr. u. Determination.)

Aufgabenstellung: StR'in Martha Hilker.
Datum: 08.02.1923.

Aus den Jahren 1924 und 1925 sind keine Arbeiten vorhanden.

C. Vollwertiges Mädchenabitur 1926 bis 1936

C.1 Reifeprüfung Ostern 1926

1. Um eine gegebene Kugel ist diejenige gerade, quadratische Pyramide zu beschreiben, die das kleinste Volumen hat.
2. Die Brennpunkte der Ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ seien die Scheitel einer Hyperbel, deren Brennpunkte die Hauptscheitel der Ellipse sind. Wo schneiden sich die beiden Kurven?
3. In Hannover (φ = 52° 22' 15") beobachtete man die Höhe der Sonne zu h = 50° 10' bei einem (von Süden gegen Osten gerechneten) Azimut a = 16° 20'. Wie groß war an dem Tage die Deklination der Sonne, und wann wurde die Beaboachtung gemacht?
4. Ein Kapitalist verleiht 20000 $\mathcal{M}$. Sein Schuldner geht die Verpflichtung ein, am Ende eines jeden Jahres 2590 $\mathcal{M}$ abzuzahlen. Wieviel Jahre werden vergehen, bis die Schuld beglichen ist, wenn 5 % Zinseszinsen gerechnet werden?

Aufgabenstellung: StR’in Martha Hilker.
Datum: 14.01.1926.

C.2 Reifeprüfung Ostern 1927

1. In einem Oktaeder (a = 8 cm) sind die Mitten der benachbarten Flächen miteinander verbunden. Wie groß ist die Kante des entstehenden Würfels? (Zeichnung im Schrägbild.)
2. Welche Maße besitzt das kleinste gleichschenklige Dreieck, das man dem Kreise mit dem Radius r umbeschreiben kann?
3. Ein Student gebraucht zu seinem Studium (5jährig) in jedem Semester 750 $\mathcal{M}$ und für die darauffolgende zweijährige Ausbildung jährlich 1200 $\mathcal{M}$.
   Welches Barvermögen muß er zu Beginn des Studiums besitzen, wenn aus diesem allein die Kosten bestritten werden müssen? (6 % Zinsen)

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 15.02.1927.

C.3 Reifeprüfung Ostern 1928

1. Um den Scheitel der Parabel $3y^2=16x$ ist ein Kreis mit dem Radius r = 5 cm geschlagen. Wie groß ist das beiden Kurven gemeinsame Flächenstück?

2. Eine alleinstehende Dame gibt im 52. Lebensjahr den Rest ihres Vermögens mit 13340 $\mathcal{M}$ auf eine Kapitalversicherungsanstalt, die ihr halbjährlich im voraus 500 $\mathcal{M}$ ausbezahlt. Wie lange kann die Versicherung zahlen ohne Schaden zu erleiden? (5 %).
3. Für die Bestimmung der Lage eines Erdbebenherdes ist die Differenz der Entfernung auf der Oberfläche der Erde und durch das Erdinnere wichtig. Wie groß ist diese Differenz, wenn das Beben in der Gegend von Lissabon (φ = + 38° 45'; λ = 9° 10' W) stattfindet und in Berlin (φ = + 52° 30'; λ = 13° 24' O) beobachtet wird?

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 23.01.1928.

C.4 Reifeprüfung Ostern 1929

1. Der Kölner Dom hat eine Höhe von 156 m. Wie lang ist sein Schatten am 18. Mai um 10 Uhr M.E.Z. (φ = 50° 57', λ = 6° 54' O)?
2. Unter welchem Winkel schneiden sich die Ellipse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ und die Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkt der Ellipse liegt und deren Brennpunkt mit einem Brennpunkt der Ellipse zusammenfällt?
3. Berechne alle Wurzeln der Gleichung $x^5 - 5 = 0$.

Aufgabenstellung: StR Fritz Grundel.
Datum: 29.01.1929.

C.5 Reifeprüfung Ostern 1930

1. Das Luftschiff „Graf Zeppelin“ legte auf seiner Fahrt von Friedrichshafen (φ_1 = + 47,7°; λ_1 = 9,5° O) nach Tokio (φ_2 = + 35,7°; λ_2 = 139,7° O) 11744 km zurück. Um wieviel Prozent übertrifft dieser Weg die kürzeste Entfernung? Mit welchem Kurs hätte das Luftschiff Friedrichshafen verlassen müssen, wenn es den kürzesten Weg eingeschlagen hätte?
2. Die Parabel $y^2 = 4x$ wird von einer Geraden geschnitten, die mit der x-Achse im Nullpunkt den Winkel α = 30° bildet. Wie lang ist die entstehende Parabelsehne? Wie groß ist die Fläche, die aus der Sehne und den Tangenten in den Schnittpunkten gebildet wird?
3. Die Eltern eines Ende 1929 geborenen Kindes schließen für dieses einen Ausbildungsversicherungsvertrag ab, der die Gesellschaft verpflichtet, am 1. I. 1949, 1. I. 1950 u.s.w. bis 1. I. 1954 Beträge von je 1200 $\mathcal{M}$ zu zahlen. Welche Jahresprämie muß vom 1. I. 1930 bis zum 1. I. 1948 eingezahlt werden? (5 %)

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 24.01.1930.

C.6 Reifeprüfung Ostern 1931

1. Untersuche die Funktion $y = x^3 + 13x^2 - 9x - 117$ auf Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte, und bestimme die Gleichung der Tangente in dem Schnittpunkt der Kurve mit der y-Achse.
2. Die Nordfront unseres Schulgebäudes wird am längsten Tage nachmittags von $16^{h}\ 9^{min}$ (M.E.Z.) an von der Sonne beschienen. Welche Richtung hat diese Front?
3. Die Parabel $y^2 = 4x$ wird von der Geraden $3y - 4x + 4 = 0$ geschnitten. Legt man durch die Schnittpunkte an die Parabel die Tangenten, so scheinen diese sich auf der Leitlinie zu schneiden und aufeinander senkrecht zu stehen. Prüfe dieses Ergebnis analytisch.

Aufgabenstellung: StR Fritz Grundel.
Datum: 05.02.1931.

C.7 Reifeprüfung Ostern 1932

1. Welcher von allen Rhomben, die man einem Kreise umbeschreiben kann, hat die kleinste Fläche?
2. Um 9 Uhr verläßt eines der Schnellflugzeuge der Lufthansa, das eine Reisegeschwindigkeit von 250 km/std. besitzt, den Berliner Flughafen mit dem Kurs S 21° W. Wo befindet es sich um 11 Uhr?
3. Konstruiere den Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt, und der die Geraden $y = x + 2$, $y = -x - 1$ und $x = 3$ berührt.

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 22.01.1932.

C.8 Reifeprüfung Herbst 1932

1. Um den Scheitel der Parabel $3y^2 = 16x$ ist ein Kreis mit dem Radius $r = 5$ geschlagen. Wie groß ist das beiden Kreisen gemeinsame Flächenstück?
2. Ein Flugzeug verläßt Kassel (φ = 51° 19'; λ = 9° 30') mit dem Kurs W 10° S. Seine Geschwindigkeit beträgt 100 km/Std. Nach 2 Stunden muß es notlanden. Wo befindet es sich?
3. Untersuche und zeichne $y = \frac{1}{3}x\sqrt{18 - x^2}$.

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 21.09.1932.

C.9 Reifeprüfung Ostern 1933

1. Eine Halbkugel ist durch einen Kegelmantel mit möglichst geringer Oberfläche zu überdecken.
2. Wo kann man am 1. Februar 20^{00} h in Keppel die Wega beobachten?
3. Ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkt F_1 im Ursprung des Koordinatensystems liegt, und dessen Hauptachse mit der x-Achse des Koordinatensystems den Winkel $\alpha = 30°$ bildet, wird von den Geraden $x = 1$ und $x = 2$ berührt. Konstruiere die Kurve.

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 30.01.1933.

C.10 Reifeprüfung Ostern 1934

1. Von unserem Schulhofe aus kann man im Frühjahr die Sonne, weil sie hinter der „Eiserhelle" aufsteigt, erst sehen, wenn sie eine Höhe von etwa 7,5° erreicht hat. Von wieviel Uhr M.E.Z. an wird am 1. Mai der Schulhof von der Sonne beschienen?
2. Im Mittelpunkt der Ellipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ liegt der Scheitel einer Parabel, deren Brennpunkt mit dem positiven Brennpunkt der Ellipse zusammenfällt. Wo schneiden sich die beiden Kurven?
3. Untersuche die Funktion $y = \frac{x^2 - 9}{x - 5}$.

Aufgabenstellung: StR Fritz Grundel.
Datum: 25.01.1934.

C.11 Reifeprüfung Herbst 1934

1. Welche Gleichung besitzt der Umkreis des Dreiecks
   $P_1(-1;-1)$ $P_2(+5;+1)$ $P_3(+1;+4)$?
2. Bestimme Extremwerte und Wendepunkte der Funktion $y = x \cdot \sqrt{4 - x}$ und zeichne sie.
3. Auf dem Gipfel eines Berges steht ein 30 m hoher Turm. Man erblickt von einem Punkte der Ebene aus die Spitze des Turmes unter dem Erhebungswinkel α = 12,2° und seinen Fuß unter dem Erhebungswinkel β = 11°. Wie hoch ist der Berg?

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 22.09.1934.

C.12 Reifeprüfung Ostern 1935

1. Um den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel ist der Kreis mit dem Radius e geschlagen. Die Tangenten, die in den Schnittpunkten an beide Kurven gelegt werden, scheinen mit der x-Achse gleichseitige Dreiecke zu bilden.
2. An jeder Ecke eines Körpers stoßen je zwei Quadrate und gleichseitige Dreiecke zusammen. Berechne die Zahl der Ecken, Flächen und Kanten; zeichne das Netz des Körpers.
3. Wo befindet sich ein Flugzeug, das Metz (φ = 49,2°, λ = 6,2° O) mit der Geschwindigkeit V = 250 km/std unter dem Kurs N 35 O verlässt, nach einstündigem Fluge?

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 29.01.1935.

C.13 Reifeprüfung Ostern 1936

1. Welches ist das größte gleichschenklige Dreieck, das man einer Parabel so einbeschreiben kann, daß sein Scheitel im Brennpunkte und die Endpunkte der Basis auf der Kurve liegen? (Die Grundlinie des Dreiecks soll die Achse der Parabel zwischen Scheitel und Brennpunkt schneiden!)
2. Ein Kegelschnitt berührt die Geraden $x = 2$, $y = -4$ und $y = x + 4$; ein Brennpunkt liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Zeichne die Kurve.
3. An welchen Tagen und zu welcher Zeit ist in Keppel der nach NW fallende Schatten eines senkrechten Stabes gleich seiner doppelten Länge?

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 29.01.1936.

Im Frauenoberschul-Abitur der Jahre 1937 bis 1941 gab es keine schriftlichen Arbeiten im Fach Mathematik.

D. Frauenabitur 1942 bis 1944 (Zweiter Weltkrieg), Abitur der Förderlehrgänge 1947

D.1 Reifeprüfung Ostern 1942

1. Die Vorderfornt unseres Schulgebäudes wird am längsten Tage von nachmittags 4 Uhr 9 min MEZ an von der Sonne beschienen. Welche Richtung hat das Gebäude?
2. Ein Wasserkessel hat die Form eines Kegelstumpfes, der unten durch eine passende, flache Kegelhaube abgeschlossen ist. Die lichte Weite des Kegelstumpfes beträgt oben 70 cm, unten 50 cm, seine Seitenlinie 40 cm. Die innere Höhe des Kegelschnittes ist 10 cm. Wieviel ℓ faßt der Kessel?
3. In einer Entfernung von 20 m vom Ufer eines Flusses steht ein Turm von 30 m Höhe. Von der Turmspitze erscheint die Breite des Flusses unter dem Winkel 33° 10'. Welche Breite hat der Fluß?

Aufgabenstellung: StR Fritz Grundel.
Datum: 06.03.1942.

D.2 Reifeprüfung Ostern 1943

1. Ein Luftschutzraum für 25 Personen soll die Form eines Zylinders von 6 m Durchmesser mit aufgesetzter Kugelkappe von 60 cm Höhe erhalten. Wie hoch muß der Zylinder sein, wenn man für jede Person 3 m³ Luft berechnet?
2. Nach 35 Dienstjahren scheidet ein Beamter mit dem Endgehalt von 5000 $\mathcal{RM}$ aus dem Dienst. Er lebt noch 10 Jahre und bezieht 80 % seines Endgehaltes als vorschüssig zahlbares Ruhegehalt. Wieviel hätte er während seiner Dienstzeit jährlich zu $3^1/_5$ % bei einer Sparkasse anlegen müssen, um während der 10 Jahre durch Verbrauch seiner Ersparnisse das gleiche Einkommen zu haben, das ihm jetzt als Ruhegehalt zusteht?
3. Um wieviel Uhr mitteleuropäischer Zeit steht am längsten Tag die Sonne in Keppel genau im Osten, und wie hoch steht sie dann? (Zeitgleichung + 2 min; $\rho = 51°$, $\lambda = 8°$, $\delta = 23{,}5°$)
4. Zusatzaufgabe: Aus einem Kreis mit dem Radius r soll ein Ausschnitt dem Mittelpunktswinkel α herausgeschnitten und zu einem Kegelmantel aufgerollt werden. Wie groß muß der Winkel α gewählt werden, wenn der Öffnungswinkel des Kegels 30° betragen soll?

Aufgabenstellung: StR Fritz Grundel.
Datum: 18.02.1943.

D.3 Reifeprüfung Ostern 1944

1. Von einem 10 m über dem Erdboden liegenden Fenster eines Hauses sieht man einen 80 m vom Haus entfernten Turm unter dem Winkel

$\alpha = 40° 50'$. Wie hoch ist der Turm, und wie weit ist die Turmspitze vom Fenster entfernt?
2. Eine Kugel vom Radius $r = 5$ cm wird zentral durchbohrt. Welchen Rauminhalt hat der ringförmige Restkörper, wenn die Weite der Bohrung $2\rho = 6$ cm beträgt?
3. Auf unserem Sportplatz ($\gamma = 51°$, $\lambda = 8°$) ist die Sonne im Herbst erst zu sehen, wenn sie hinter der Eiserhelle aufsteigend, eine Höhe von 10° erreicht hat. Von welcher MEZ an wird am Vormittag des 1. Nov. ($\delta = -14{,}5°$, Zgl = –16 min) der Platz von der Sonne beschienen?

Aufgabenstellung: StR Fritz Grundel.
Datum: 29.01.1944.

D.4 Reifeprüfung (Förderlehrgang) Sommer 1947

1. Die Parabel $y^2 = 4x$ wird von der Geraden $3y - 4x + 4 = 0$ geschnitten; in den Schnittpunkten werden die Tangenten an die Kurve gelegt. Welche Lage haben diese zueinander, und wo liegt ihr Schnittpunkt? Prüfe das Ergebnis der Zeichnung durch Rechnung nach.
2. Von einer Stadt A führt nach der genau nördlich gelegenen, 72 km entfernten Stadt B ein gerader Kanal. Nordöstlich von A liegt, 38 km entfernt, eine Stadt C. Von hier aus soll ein neuer Wasserlauf nach dem erwähnten Kanal gegraben werden, dessen Mündung gleich weit von B und C entfernt ist. Wie groß ist diese Entfernung?
3. Welche Aufschlüsse geben uns die Ableitungen einer Funktion über den Verlauf der Funktionskurve?

Aufgabenstellung: StR Fritz Grundel.
Datum: 10.06.1947.

D.5 Reifeprüfung (Restprüfung Sonderlehrgänge) Dezember 1947

1. Um die Höhe des Ulmer Münsters zu bestimmen, hat man in der Horizontalebene seines Fußpunktes eine Standlinie von 94,55 m abgesteckt und von den Enden der Standlinie aus die Turmspitze anvisiert. Die abgelesenen Erhebungswinkel sind 75° 58' und 50° 4'.
2. Untersuche die Funktion $y = \dfrac{1 - 4x^2}{4 - x^2}$ auf Nullstellen, Pole, Lücken, Hoch- und Tiefwerte, Wendepunkte und zeichne ihre Kurve.
3. Die gerade Linie in der analytischen Geometrie. [Aufsatz]

Aufgabenstellung: StudAss'in Gertrud Zimmer.
Datum: 05.12.1947.

E. Vollabitur 1949 bis 1976

E.1 Reifeprüfung Ostern 1949

1. Die Ecken eines Dreiecks sind $A(-2;-1)$, $B(8;1)$ und $C(0;3)$. Beweise analytisch, dass sich die drei Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c in einem Punkte S und im Verhältnis 2 : 1 schneiden.
2. Am 25. Mai 1945 verließ ein Flugzeug nach zweiwöchigen Erkundungsflügen in der Arktis den westlichsten Flughafen des britischen Weltreiches, Whitehorse (φ_n = 70°; λ_n = 130° W) in Kanada, um auf dem kürzesten Weg und ohne Zwischenlandung nach seinem Heimathafen in Shropshire (φ_s = 52° 42'; λ_s = 2° 49' W) in England zu fliegen.
   Bestimme zeichnerisch oder rechnerisch die Länge der Fluglinie und den Kurswinkel bei der Abfahrt.
3. Die Differentiation der ganzen rationalen Funktion.

Aufgabenstellung: StudAss'in Gertrud Zimmer (Korrektur: StR Fritz Grundel).
Datum: 19.02.1949.

E.2 Reifeprüfung Ostern 1950

1. Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ und die Asymptoten der Hyperbel (α = e der Ellipse und b = $3\frac{1}{5}$) im 1. Quadranten? Zeichnung und Rechnung.
2. Wie lang müssen die Kanten eines oben offenen Kohlenbehälters sein, der die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche hat, wenn er 3 Tonnen Kohlen fassen soll und wenn zu seiner Herstellung möglichst wenig Baustoff verwendet werden soll? (1 Tonne Kohle entspricht $\frac{2}{3}$ m³).
3. An welchem Tag des Jahres 1927 und um wieviel Uhr wahrer Ortszeit mußte man das Fernrohr in Bonn (φ = 50° 42', λ = 7° 6') unter einem Azimut von α = S 75° O in die Höhe h = 25° auf die Sonne richten?

Aufgabenstellung: StudAss'in Gertrud Zimmer.
Datum: 02.02.1950.

E.3 Reifeprüfung Ostern 1951

1. Für geophysikalische Messungen wird zuweilen die Differenz zwischen der Oberflächen- und der Sehnenentfernung zweier Orte gebraucht. Wie groß ist diese für Berlin (φ = 52,5°, λ = 13,1° ö) und Lissabon (φ = 38,7°, λ = 9,20 w)?
2. Zwei Tangenten einer Parabel schneiden sich auf der Leitlinie. Durch welchen Punkt der Achse führt die Berührungssehne? Maß für die Zeich-

nung: p = 2. Die Rechnung ist mit diesem Halbparameter und mit der Ordinate c = 1 für den Leitlinienpunkt durchzuführen. Bei ausreichender Zeit ist hernach die allgemeine Lösung zu versuchen.

3. In einer Stadt besteht die Anordnung, dass Reklamesäulen einheitlich die Form eines Zylinders mit aufgesetzter Halbkugel haben sollen. Ihr Rauminhalt darf 4 m³ nicht übersteigen. Eine findige Herstellerfirma möchte auch die Rundung der Haube zur Reklame verwenden und fragt einen Mathematiker, wie sie dann bei den gegebenen Anordnungen Radius und Höhe des zylindrischen Teiles bemessen müsse, damit die gesamte Reklamefläche möglichst groß werde.

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 18.01.1951.

E.4 Reifeprüfung Ostern 1952

1. Die Kurve $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ ist auf ihre Extremwerte und Wendepunkte zu untersuchen und im Gebiet von x = –3 bis x = 1 zu zeichnen. Die aus der Zeichnung sich ergebende Nullstelle soll nach der Newtonschen Näherungsmethode bis auf zwei Dezimalstellen bestimmt werden.
2. Die Nordfront unseres Schulgebäudes (φ = 50,98°; λ = 8,08°) wird am längsten Tage (δ = 23,45°; Zeitgl. = 1,7 min) von 16^{09} Uhr MEZ an von der Sonne beschienen. Welche Richtung hat das Gebäude?
3. Die Parabel $y^2 = 4x$ wird von der Geraden $3y - 4x + 4 = 0$ geschnitten. Durch die Schnittpunkte legt man die Tangenten an die Parabel. Die Lage ihres Schnittpunktes und der Winkel, den sie miteinander bilden, sind durch Rechnung und Zeichnung zu ermitteln. Die Konstruktion der Figur ist zu beschreiben.

Aufgabenstellung: OStR Fritz Grundel.
Datum: 08.02.1952.

E.5 Reifeprüfung Ostern 1953

1. Von dem Orte A geht eine gerade Landstraße aus. Nach einem Kilometer liegt genau zur Rechten in 250 m Abstand das Gehöft B. Eine weglose Heidefläche trennt es von der Straße; man kann sie nur mit $^2/_3$ der Geschwindigkeit durchschreiten, die man auf der Straße hatte. Ein Postbote muss täglich vom Orte A zum Hofe B. Wo muss er die Straße in Richtung auf den Hof verlassen, wenn er Zeit sparen will?
2. Es gibt einen Körper, bei dem an jeder Ecke ein Quadrat und drei gleicheitige Dreiecke zusammentreffen. Errechne die Zahl der Ecken, Flächen und Kanten des Körpers und zeichne ihn im Schrägbild.
   Beispiel: a = 4. Die Rechnung ist ausführlich zu begründen.

3. Die Hauptscheitel einer Ellipse sind Brennpunkte einer Hyperbel; deren Scheitel fallen wiederum mit den Brennpunkten der Ellipse zusammen. Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven?
   Beispiel: Ellipse a = 5, b = 3. Die Rechnung ist möglichst allgemein durchzuführen.

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 02.02.1953.

E.6 Reifeprüfung Ostern 1954

1. Auf den Asymptoten einer Hyperbel sind in deren Schnittpunkte Senkrechte errichtet. Welches ist der kürzeste Abstand dieser Senkrechten von den Ästen der Kurve? Beispiel: a = 2, b = 1.
   gefordert: Konstruktion mit Beschreibung; Rechnung.
2. In welchem Verhältnis müssen Grundkreisradius und Höhe eines Kegels stehen, wenn bei gegebenem Volumen die Mantelfläche besonders klein sein soll?
3. Gegeben ist das gleichseitige Dreieck $a = 4\sqrt{3}$. Eine Parabel, deren Scheitel in einer Ecke liegt, führt durch die anderen Ecken. In welchem Verhältnis stehen die durch die drei Dreiecksseiten bestimmten Parabelsegmente?

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 28.01.1954.

E.7 Reifeprüfung Ostern 1955

1. In eine durch den Radius r gegebene Kugel soll ein solcher gerader Doppelkegel, dessen beide Spitzen auf der Oberfläche der Kugel liegen, eingezeichnet werden, dass die Differenz der Volumina der beiden einfachen Kegel ein Maximum wird. Wie weit ist die gemeinsame Grundfläche der Kegel vom Kugelmittelpunkt entfernt und wie groß ist der Inhalt dieses Doppelkegels?
2. Ein durchsichtiges Ellipsoid, dessen große Achse 2a = 10 cm und dessen kleine Achse 2b = 6 cm beträgt, wird von einem leuchtenden Punkt erhellt, der in der Entfernung 10 cm vom Mittelpunkt auf der Verlängerung der großen Achse liegt. Auf der anderen Seite des Ellipsoides ist in dem Mittelpunktabstand d = 6 cm ein ebener Schirm senkrecht zur großen Achse aufgestellt. Wie groß ist der auf diesem entstehende Schatten?
3. Gegeben sind zwei kongruente Parabeln $y^2 = +8x$ und $y^2 = -8x$, die so von einem Kreise geschnitten werden, dass die Schnittpunkte senkrecht zur x-Achse über den Brennpunkten liegen. Wie heißt die Gleichung des Kreises? Wie groß ist der Rauminhalt des Körpers, der durch Rotation der

zwischen den Parabeln und dem Kreis liegenden Figur um die x-Achse gebildet wird?

Aufgabenstellung: OStR Fritz Grundel.
Datum: 27.01.1955.

E.8 Reifeprüfung Ostern 1956

1. Ein Schnittpunkt der beiden Leitkreise der Ellipse $4x^2 + 7y^2 = 28$ ist die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen drei Seiten die Kurve berühren. Wie groß ist die Fläche dieses Dreiecks?
   Gefordert: Zeichnung, Rechnung.
2. Ein regelmäßiges gerades dreiseitiges Prisma soll bei gegebenem Volumen eine möglichst geringe Gesamt-Kantenlänge haben. Wie verhalten sich die Längen von Grundkante und Höhe zueinander?
3. Die Hyperbel $a = b = 1$ und ihre konjugierte Hyperbel werden von dem Kreise geschnitten, der durch alle Brennpunkte führt. Beschreibe die Körper, die entstehen, wenn die vom Kreise und den Ästen beider Hyperbeln umschlossenen Flächen um die Hauptachse der Grundhyperbel rotieren, und berechne ihre Volumina.
   Gefordert: Zeichnung, Rechnung.

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 19.01.1956.

E.9 Reifeprüfung Ostern 1957

1. Die Funktion $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ ist auf ihre Extremwerte und ihren Wendepunkt zu untersuchen.
   Gef. Zeichnung und Rechnung.
2. Wie groß ist das Flächenstück, das die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ von der Parabel $y = x^2 - 4$ abgrenzt?
3. Ein Paraboloid entsteht infolge Drehung der Fläche zwischen der Parabel $y^2 = 2px$ und der Geraden $x = 3p$ um die Abszisse. Werden die Schnittpunkte von Gerade und Parabel mit dem Koordinatenursprung verbunden, so entsteht ein Kegel. Schnitpunkte (S_1, S_2, O). Über demselben Grundkreis entsteht ein Halbellipsoid, wenn die Punkte S_1, S_2 und O Scheitel sind.
   Wie verhalten sich die Volumina der drei Drehkörper zueinander?

Aufgabenstellung: StudAss'in Wilian-Sporbeck.
Datum: nicht angegeben.

E.10 Reifeprüfung Ostern 1958

1. Aus einem Kreise soll ein Sektor mit einem so großen Zentriwinkel ausgeschnitten werden, daß der aus dem Rest gebogene Kegelmantel einen möglichst großen Raum überdeckt.
   Gefordert: Konstruktion $r = 2b = 5$ cm
   Rechnung.
2. Ein Faß entsteht durch Rotation des Mittelteiles einer Ellipse um ihre Hauptachse. Der innere Durchmesser ist in der Mitte 50 cm und verringert sich zu den 60 cm voneinander entfernten Böden bis auf 40 cm. Wieviel Liter faßt es?
3. Unter welchen Winkeln wird eine rechtwinklige Hyperbel von ihren Leitkreisen geschnitten?
   Maß für die Konstruktion: $a = b = 1{,}5$ cm.

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 23.01.1958.

E.11 Reifeprüfung Ostern 1959

1. Zeichne um den Nebenscheitel einer Ellipse $a = 2b$ den Kreis, der die Kurve im anderen Nebenscheitel berührt. Ziehe von diesem aus die Sehnen zu den Schnittpunkten der beiden Kurven und untersuche, unter welchen Winkeln sie die Ellipse treffen.
   Gefordert: Zeichnung ($b = 3$) und Rechnung.
2. Welche Fläche hat die Schleife der Funktion $y = (1 - x) \cdot \sqrt{x}$, wie lang ist der größte Durchmesser der Schleife, der senkrecht zur Kurvenachse gezeichnet werden kann, und welche Winkel bildet die Kurve im Doppelpunkt?
   Gefordert: Zeichnung, Rechnung.
3. Ein Parabelschnitt, der durch den Parameter abgegrenzt wird, rotiert um diesen. Wie groß ist das Volumen des spindelförmigen Rotationskörpers?
   Gefordert: Schnittzeichnung ($p = 2$) und Rechnung.

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 22.01.1959.

E.12 Reifeprüfung Ostern 1960

1. Ein romanisches Kirchenfenster soll die Fläche 7,5 m² haben. Wie sind Höhe und Bogenradius zu wählen, wenn der Umfang am kleinsten sein soll?
   Gefordert: Planzeichnung, Rechnung, Konstruktion 1 : 20 nach dem Ergebnis der Rechnung.

2. Die Schnittpunkte der Leitkreise einer Ellipse sind Ecken eines Tangentenrhombus. Wie groß ist dessen Fläche?
   Gefordert: Konstruktion ($a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{6}$), Rechnung.
3. Gegeben ist die Funktion $y = \sqrt{x\,(x^2 - 4)}$. Untersuche ihren Verlauf, zeichne ihr Bild und berechne das Volumen des Körpers, der bei der Rotation des geschlossenen Teiles der Kurve um die Symmetrieachse entsteht.
   Gefordert: Rechnung und Zeichnung.

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 21.01.1960.

E.13 Reifeprüfung Ostern 1961

1. Von einer geraden Straße *a* zweigt rechtwinklig ein Weg *b* ab, an dem nach 100 m ein repräsentatives Gebäude mit 100 m Frontlänge beginnt. Ein Photograph soll es vom Rande der Straße *a* aus so aufnehmen, daß es besonders imposant wirkt, d. h. daß der Bildwinkel, unter dem es erscheint, besonders groß ist. Wo muß er seinen Standpunkt wählen?
2. Der Halbparameter einer Parabel wird um ein Viertel seiner Länge über die Kurve hinaus bis zum Punkte P_0 verlängert. Von P_0 aus werden die Tangenten an die Parabel gelegt. Welchen Winkel schließen sie ein und wie groß ist die zwischen ihnen und der Kurve liegende Fläche?
   Gefordert: Zeichnung ($p = 2$), Rechnung allgemein.
3. Als jemand die Mittelpunktsgleichung eines Kreises mit dem Radius 1 aufstellen sollte, schrieb er statt der zweiten versehentlich dritte Potenzen. Untersuche, zu welchem Bild er damit seinen Kreis verfälscht hat, und zeichne es.

Aufgabenstellung: StR Arnold Kluth.
Datum: 26.01.1961.

E.14 Reifeprüfung Ostern 1962

1. Diskutiere den Verlauf der Kurve zu der Funktion $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ und berechne die Fläche zwischen Kurve und *x*-Achse. (Verlangt: Rechnung und Zeichnung)
2. Die Parabel $y^2 = 4x$ wird von der Geraden $3y - 4x + 4 = 0$ geschnitten. Legt man in den Schnittpunkten an die Parabel die Tangenten, so scheinen diese sich nach einer Zeichnung auf der Leitlinie zu schneiden und senkrecht aufeinander zu stehen. Durch Berechnung ist diese Vermutung nachzuprüfen.

3. Bestimme die Abszissen der Extremwerte und des Wendepunktes für die Funktion $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 15x + 4$. In dem Beispiel ergibt sich die Abszisse des Wendepunktes als Arithmetisches Mittel der Abszissen der Extremwerte. Beweise diese Gesetzmäßigkeit für eine allgemeine rationale Funktion 3. Grades. Welche Bedingung muß für einen Koeffizienten der Gleichung gelten, damit die Extremstellen symmetrisch zum Nullpunkt liegen?

Aufgabenstellung: Eckbert van Randenborgh.
Datum: 18.01.1962.

E.15 Reifeprüfung Ostern 1963

1. Ein Kurve, die durch eine ganze rationale Funktion 4. Grades dargestellt wird, soll symmetrisch zur *y*-Achse sein. Sie geht durch den Punkt $P_1(0|4)$ und hat im Punkt $P_2(4|0)$ ein Minimum. Stellen Sie die Gleichung der Kurve auf und untersuchen Sie ihre weiteren Eigenschaften. Die Fläche zwischen der Kurve und der *x*-Achse ist zu berechnen.
2. Wie muß der Parameter *p* der Parabel $y^2 = 2px$ gewählt werden, damit die Parabel den Kreis $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ von außen in zwei Punkten berührt? (Zahlenbeispiel $a = 10$, $r = 6$) Die Aufgabe ist möglichst zunächst mit allgemeinen Zahlen zu lösen. Es ist zu überlegen, ob es für *p* nur eine oder zwei Lösungen gibt. Welche Beziehung muß zwischen den Größen *a* und *r* bestehen, damit die allgemeine Aufgabe lösbar ist? (Rechnung und Zeichnung)
3. Es sind folgende drei rationale Funktionen gegeben, eine ganze (1), eine unecht gebrochene (2) und eine echt gebrochene (3):
   1. $y = x^2 - 7x + 12$
   2. $y = \frac{x-4}{x-3}$
   3. $y = \frac{x-3}{x^2-7x+12}$.

   Vergleichen Sie den Verlauf der Kurven zu den drei Funktionen. Untersuchen Sie dazu:
   a) das Verhalten im Unendlichen
   b) die Nullstellen und Unstetigkeiten (Lücke und Pol)
   c) eventuelle Stellen mit horizontaler Tangente.
   Der Verlauf der drei durch die Funktionen gegebenen Kurven ist zu skizzieren.

Aufgabenstellung: Eckbert van Randenborgh.
Datum: 17.01.1963.

E.16 Reifeprüfung Ostern 1964

1. a) Die Schnittpunkte der Geraden $3y - x - 12 = 0$ und der Ellipsen $4x^2 + 9y^2 = 144$ und die Tangenten in diesen Schnittpunkten sind zu konstruieren, ohne die Ellipse zu zeichnen.
   b) Berechnen Sie die Gleichungen der Tangente, ihren Schnittpunkt *S* und zeigen Sie, daß die Richtung von *OS* konjugiert ist zu der Geraden $3y - x - 12 = 0$.

2. a) Untersuchen Sie die Funktion $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ auf Nullstellen, Unstetigkeitsstellen, Extremwerte und das Verhalten für $x \to \infty$. – Zeichnen Sie Kurve und die Asymptoten.
   b) Bilden Sie die Funktionenfolge $y_n = \frac{x^3}{x^2 - n^2}$ (n = 1, 2, …).
   Welche Folgen durchlaufen die Unstetigkeitsstellen?
   Welche Folgen durchlaufen die Abszissen der Extremwerte?

3. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
   $$(1+a)^n = 1 + \frac{n}{1}a + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3 + \ldots + \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}a^{n-1} + a^n .$$
   Erläutern Sie an diesem Beispiel eingehend die Beweismethode.

Aufgabenstellung: StR'in E. D.
Datum: 12.12.1963.

E.17 Reifeprüfung Ostern 1965

1. Diskutiere die gebrochen rationale Funktion $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$.
   Verlangt: Zeichnung und Rechnung.
2. Gegeben ist ein Kreis $x^2 + y^2 = 25$. In den Punkten $P_1(3|4)$ und $P_2(4|-3)$ werden Tangenten an den Kreis gelegt. Berechne ihre Gleichungen und ihren Schnittpunkt. Bestimme eine affine Abbildung, die eine der Kreistangenten in eine Ellipsentangente überführt, die parallel zur Geraden $y = \frac{4}{5}x$ verläuft. Gib Ellipsen- und Tangentengleichungen an und weise nach, daß die Ellipsentangenten konjugierte Richtungen haben.
   Verlangt: Zeichnung und Rechnung.
3. Es werden die Restklassen modulo 6 betrachtet.
   Es ist eine Restklassenadditions- und Restklassenmultiplikationstabelle aufzustellen. Es ist zu beweisen, daß die Restklassen modulo 6
   1) eine additive Gruppe
   2) aber keine multiplikative Gruppe bilden und zwar auch dann nicht, wenn man die Nullrestklasse nicht hinzunimmt.

Welche Gruppenforderungen sind im zweiten Fall nicht erfüllt? Welcher Zusammenhang besteht hier mit der Modulzahl 6?

Aufgabenstellung: E. v. R.
Datum: 17.12.1964.

E.18 Reifeprüfung Ostern 1966

1. Untersuchen Sie die Kurve mit der Gleichung $y = 2x^2 - \frac{1}{4}x^4$ und zeichnen Sie das Schaubild im Bereich $-3 \leq x \leq 3$.
   Zeigen Sie, daß die Ordinaten der Hochpunkte sich zu denen der Wendepunkte wie 9 : 5 verhalten.
   Untersuchen Sie, ob diese Beziehung für alle Kurven $y = ax^2 - bx^4$ mit $a, b > 0$ gilt.
2. Gegeben sind zwei Kreise
   1) $x'^2 + y'^2 = 4$
   2) $(x-1)^2 + y^2 = 1$.
   Auf den ersten Kreis wird eine affine Abbildung $x = x'$, $y = \frac{1}{2}y'$ angewandt.
   Bestimmen Sie die Schnittpunkte der entstehenden Ellipse mit dem zweiten Kreis.
   Wie muß die affine Abbildung gewählt werden, damit die Ellipse den zweiten Kreis nur berührt? (Rechnung und Zeichnung)
3. Es werden die Zahlen $a + b \cdot \sqrt{2}$ betrachtet. Es ist zu beweisen:
   a) Diese Zahlen bilden eine additive Gruppe, wenn *a* und *b* ganze Zahlen sind.
   b) Sie bilden eine multiplikative Gruppe, wenn *a* und *b* rational, aber nicht gleichzeitig gleich Null sind.
   Zusatzfrage: Warum bilden die Zahlen $a + b \cdot \sqrt{2}$ keine multiplikative Gruppe, wenn man für *a* und *b* nur ganze rationale Zahlen zuläßt?

Aufgabenstellung: StR'in E. D. (zusammen mit E. v. R.).
Datum: 16.12.1965.

E.19n Reifeprüfung 1966 – Neusprachlicher Zweig

1. Eine Parabel 3. Ordnung geht durch *O* und *P*(–3|3) und hat in *Q*(3|3) eine waagerechte Tangente.
   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, untersuchen Sie die Kurve und zeichnen Sie das Schaubild im Bereich $-3 \leq x \leq 6$. (LE 1 cm)

b) Zeigen Sie, daß die Abszisse des Wendepunktes das arithmetische Mittel der Abszissen der Extremwerte ist. Gilt dasselbe für alle Parabeln $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$?

2. Ein Durchmesser einer zu den Koordinatenachsen symmetrisch liegenden Ellipse hat die Gleichung $y = \frac{2}{5}x$, eine Tangente die Gleichung $y = -\frac{3}{5}x + 6$. Tangente und Durchmesser haben konjugierte Richtungen.
   Berechnen Sie den Berührpunkt und die Gleichung der Ellipse. Welche Gleichungen haben die zum gegebenen Durchmesser parallelen Tangenten?
   Konstruieren Sie die Achsen der Ellipse und eine der berechneten Tangenten. (LE 1 cm)
3. Es werden folgende Mengen betrachtet:
   a) die Restklassen modulo 6,
   b) die Restklassen modulo 7, jeweils ohne die Nullrestklasse.
   Untersuchen Sie, ob diese Mengen die Gruppenaxiome bezüglich der Multiplikation erfüllen.
   Zusatzfrage: Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Ergebnissen und den Moduln 6 bzw. 7?

Aufgabenstellung: StR'in E. D.
Datum: 29.09.1966.

E.19f Reifeprüfung 1966 – Gymnasium für Frauenbildung

1. a) Beweisen Sie: Die Tangente an die Parabel $y = ax^n$ in $P_1(x_1|y_1)$ hat den *y*-Achsenabschnitt $-(n-1)\,y_1$. Wie konstruiert man also die Tangente am einfachsten?
   b) Führen Sie die Konstruktion für $y = \frac{1}{4}x^3$ und $P_1(2|?)$ bzw. $P_1'(?|-2)$ aus. Weisen Sie im Beispiel und auch allgemein nach, daß bei $x_1 = y_1$ die Steigung in P_1 gleich *n* ist.
2. a) An den Kreis $K(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ sind die Tangenten vom Ursprung aus und die Tangente in $B(3|7)$ gezogen. Welche Fläche hat das Dreieck, das die 3 Tangenten bilden? Zeichnung im Bereich $-4 \le x \le 13$.
   b) Wählen Sie den Punkt *B* so, daß ein gleichschenkliges Dreieck entsteht und vergleichen Sie die Flächeninhalte!
3. a) Sei *O* der Ursprung eines rechtwinkl. Koord. Systems, $Q(0\,|\,\frac{9}{2})$ ein fester Punkt und *P* ein Punkt auf der Parabel $y = x^2$. Bestimmen Sie *P* so, daß der Abstand $\overline{PQ}$ minimal ist.

b) Verallgemeinern Sie a), indem Sie $Q(0|a)$ nehmen. Diskutieren Sie das Ergebnis für variables a und unterscheiden Sie die Fälle $a > \frac{1}{2}$ und $a = \frac{1}{2}$. In welcher Beziehung zueinander stehen dann $\overline{PQ}$ und $\overline{OQ}$?

Aufgabenstellung: StR G. Hö.
Datum: 29.09.1966.

E.20n Reifeprüfung 1967 – Neusprachlicher Zweig

1. a) Untersuchen Sie die Kurve mit der Gleichung $y = -\frac{1}{24}x^4 + x^2$ und zeichnen Sie das Schaubild im Bereich $-5 \leq x \leq 5$. Zeichnen Sie das aus den Wendetangenten und den Normalen im Wendepunkt gebildete Viereck ein. (LE 1 cm)
   b) Betrachten Sie nun die Funktionen $y = ax^4 + x^2$ (a reell $\neq 0$). Welche Bedingung muß a erfüllen, damit Wendepunkte vorhanden sind?
   c) Läßt sich a so bestimmen, daß das aus den Wendetangenten und den Normalen gebildete Viereck ein Quadrat ist?
2. a) Bestimmen Sie die Kreise mit dem Radius $r = 5$, die durch den Punkt $P(0|8)$ gehen und aus der x-Achse eine Sehne der Länge $s = 6$ ausschneiden!
   b) Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise mit veränderlichem Radius, die die unter a) genannten Eigenschaften haben? Welches ist der kleinste Radius für einen solchen Kreis?
3. Gegeben sind die Funktionen

   $y = \frac{x}{x-1}$; $y = \frac{x^2}{x^2-1}$; … ; $y = \frac{x^n}{x^n-1}$; also $n = 1, 2, 3, …$

   Untersuchen Sie zunächst bei den ersten beiden Gliedern der Folge und dann allgemein
   a) die Art der Unstetigkeitsstellen,
   b) die Stellen mit waagerechter Tangente und das Verhalten an diesen Stellen.

Aufgabenstellung: StR'in E. D.
Datum: 12.05.1967.

E.20f Reifeprüfung 1967 – Gymnasium für Frauenbildung

1. a) Die Kurve einer ganzen rationalen Funktion 4. Grades mit der Gleichung $y = ax^4 + bx^2 + c$ berührt die x-Achse an der Stelle $x = 1$ und geht durch $H(0\,|\,\frac{1}{2})$.

   Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, untersuchen Sie die Kurve (Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte), und zeichnen Sie das Schaubild im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq +1{,}5$ (LE = 3 cm)!

b) $y = \frac{x^4}{2t} - x^2 + \frac{t}{2}$ sei die Gleichung der Kurvenschar mit dem Parameter $t > 0$. Bestimmen Sie durch Berechnung ihrer Koordinaten die Lage der Tiefpunkte!

c) Zeigen Sie, daß für die Koordinaten der Wendepunkte (von b) die Gleichung $y = \frac{2}{3}x^2$ gilt.

2. a) Gegeben ist der Kreis $K: x^2 + y^2 = 25$ und der Punkt $P_1(20|0)$. Die Polare von P_2 steht senkrecht auf $y = 2x - 15$ und schneidet die positive x-Achse an der gleichen Stelle wie der Kreis.
   Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Polare von P_1 mit der Polare von P_2!

   b) Weisen Sie für das obige Beispiel nach, daß wenn man von den beiden Polen P_1 und P_2 das Lot auf die Polare des anderen fällt, die Längen dieser Lote sich verhalten wie die Entfernungen der Punkte vom Mittelpunkt des Kreises. (Zeichnung: LE = $\frac{1}{2}$ cm)

3. Bei dem Quadrat $ABCD$ mit der Seite a wird von D aus die Strecke $x < a$ auf $\overline{DA}$ bis E und auf $\overline{DC}$ bis F abgetragen. Dann wird das Quadrat längs EF so hochgefaltet, daß das Dreieck FDE senkrecht zum ursprünglichen Quadrat steht. Die hochstehende Ecke (D) wird mit den Ecken A, B und C des Quadrates verbunden, so daß eine Pyramide entsteht.

   a) Stellen Sie die Gleichung des Volumens V der Pyramide als Funktion von x auf!

   b) Für welche x-Werte ist V am größten?

   c) Berechnen Sie V!

Aufgabenstellung: StudAss G. Ha.
Datum: 12.05.1967.

E.21n Reifeprüfung 1968 – Neusprachlicher Zweig

1. Eine Parabel 3. Ordnung geht durch 0 und hat dort die Steigung 9. Im Wendepunkt $W(4|?)$ ist ihre Steigung –3.

   a) Geben Sie die Gleichung der Parabel an, und untersuchen Sie die Kurve.

   b) Zeichnen Sie das Schaubild im Bereich $0 \leq x \leq 8$ (LE 2 cm) und berechnen Sie die Fläche F_1, die die Kurve mit der x-Achse einschließt. Wie groß ist die Fläche F_2, die von der Geraden $y = 8$ und der Kurve begrenzt wird?

   c) Wie lautet die Gleichung dieser Parabel, wenn der Wendepunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt? Zeigen Sie, daß dann das Schaubild der Funktion symmetrisch bezüglich 0 ist.

2. a) An den Kreis $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$ sind die Tangenten vom Ursprung aus und die Tangente in $B(3|7)$ gezogen. Welche Fläche hat das Dreieck, das die drei Tangenten bilden?
   Zeichnung im Bereich $-4 \leq x \leq 13$
   b) Wählen Sie den Punkt B so, daß ein gleichschenkliges Dreieck entsteht und vergleichen Sie die Flächeninhalte.
3. In das von der Parabel $y = b - ax^2$ und der x-Achse begrenzte Segment ist ein Rechteck größten Inhalts einzubeschreiben. Zeigen Sie, daß sich die Fläche des Parabelsegments zur Fläche des maximalen Rechtecks wie $\sqrt{3}$: 1 verhält. Wann ist das maximale Rechteck ein Quadrat?

Aufgabenstellung: StR G. Hö.
Datum: 28.03.1968.

E.21f Reifeprüfung 1968 – Gymnasium für Frauenbildung

1. Die Kurve einer ganzen rationalen Funktion 4. Grades mit der Gleichung $y = ax^2 - bx^4$ hat in $H(2|4)$ eine waagerechte Tangente.
   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
   b) Untersuchen Sie die Kurve (Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte), und zeichnen Sie das Schaubild im Bereich $-3 \leq x \leq +3$ (LE = 2 cm)!
   c) Zeigen Sie, daß sich die Ordinaten der Hochpunkte zu denen der Wendepunkte wie 9 : 5 verhalten! Prüfen Sie, ob diese Beziehung für alle Kurven mit der Gleichung $y = ax^2 - bx^4$ ($a > 0$, $b > 0$) gilt!
2. Gegeben sind der Kreis $x^2 + y^2 = 2{,}89$ und die Parabel $y = \frac{3}{2}x^2$.
   a) Stellen Sie die Gleichung der Geraden auf, die senkrecht auf der Geraden $3x - 4y - 8 = 0$ steht und den Kreis im 1. Quadranten berührt! Bestimmen Sie die Schnittpunkte P_1 und P_2 der Kreistangente mit der Parabel und den Schnittpunkt A der Kreistangente mit der x-Achse!
   b) Die Fußpunkte der von P_1 und P_2 auf die x-Achse gefällten Lote seien Q_1 und Q_2. Der Scheitel der Parabel sei O. Weisen Sie durch Rechnung nach, daß die Länge der Strecke $\overline{AO}$ das geometrische Mittel der Streckenlängen von $\overline{AQ_1}$ und $\overline{AQ_2}$ ist! (Zeichnung: LE = 2 cm)
3. Die Kurve K_1 als Bild der Funktion $y = \frac{1}{4}(x-4)^2$ schneidet die Kurve K_2 als Bild der Funktion $y = -\frac{x^2}{16} + \frac{x}{2} + 4$ in A und D. Die Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ ($0 < x_0 < 8$) schneidet die Kurve K_1 in B und die Kurve K_2 in C.
   a) Wo liegen die Scheitelpunkte der Parabeln?

b) Für welchen x_0-Wert ist die Tangente an K_1 in B eine Parallele der Geraden AC?
c) Bestimmen Sie den x_0-Wert, für den die Fläche F des Dreiecks ABC ihren größten Wert hat! (Zeichnung im Bereich $-1 \leq x \leq 9$; LE = 1 cm)

Aufgabenstellung: StudAss G. Ha.
Datum: 28.03.1968.

E.22n Reifeprüfung 1969 – Neusprachlicher Zweig

1. Die Gerade mit der Gleichung $y = x + \frac{9}{2}$ begrenzt einen Abschnitt der Parabel 2. Ordnung, die im Ursprung die Tangentensteigung 1 hat und durch (–2|0) geht.
   a) Bestimen Sie den Scheitel der Parabel, zeichnen Sie die Parabel und die Gerade im Bereich $-3 \leq x \leq 3$ (LE = 1 cm), und berechnen Sie die Fläche des Parabelabschnitts!
   b) Verallgemeinern Sie a), indem Sie bei unveränderter Parabelgleichung die Geradengleichung $y = x + b$ ($b > 0$) betrachten! Bestimmen Sie ein b (nämlich b_1) so, daß die Fläche $5\frac{1}{3}$ FE wird, ferner ein b (nämlich b_2) so, daß die Länge der begrenzenden Sehne den Wert 8 hat! Zeichnen Sie die beiden Geraden in die Figur ein!
   c) Diskutieren Sie die vorerst ausgeschlossenen Fälle $b = 0$ und $b < 0$!
2. a) Legen Sie von $P_1(-1|3)$ die Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 = 5$! Stellen Sie dann die Gleichung der Ursprungsgeraden auf, die mit den Tangenten ein gleichschenkliges Dreieck bildet! Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks! (Zeichnung: LE = 1 cm)
   b) Gegeben sind der Kreis $K \equiv x^2 + y^2 + 12y - 108 = 0$ und der Punkt $S(0|12)$. Eine beliebige Gerade g mit der Steigung m geht durch S. Welche Bedingungen muß m erfüllen, damit g in bezug auf K Sekante, Tangente oder Passante ist? (Eine Zeichnung ist nicht erforderlich.)
3. Die Kurve K_1 als Graph der Funktion $y = a - \frac{x^2}{a}$ schneidet die Kurve K_2 als Graph der Funktion $y = a^3 - ax^2$ in B_1 und B_2. Für a als Parameter gilt: $a > 0$ und $a \neq 1$.
   a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte und zeichnen Sie die Kurven für $a = 2$ im Bereich $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ (LE = 1 cm)!
   b) Bestimmen Sie a so, daß die in den Schnittpunkten an K_2 gelegten Tangenten aufeinander senkrecht stehen!
   c) Für welchen Wert von a ($0 < a < 1$) hat das oberhalb der x-Achse liegende von K_1 und K_2 begrenzte Flächenstück seinen größten Wert? Wie groß ist dieser Wert?

Aufgabenstellung: StudAss G. Ha.
Datum: 20.03.1969.

E.22f Reifeprüfung 1969 – Gymnasium für Frauenbildung

1. a) Bilden Sie in den bekannten drei Schritten die Ableitungen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{c}{x^2}$.

   Ergebnis: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $g'(x) = -\frac{2c}{x^3}$.

   b) Untersuchen und zeichnen Sie den Graphen der Funktion $y(x) = x + \frac{1}{x}$.

   c) Beweisen Sie mit Hilfe der Beziehung $(x-1)^2 \geq 0$, daß für $x > 0$ stets $x + \frac{1}{x} \geq 2$ gilt.

2. a) Welche Parabeln 2. Ordnung gehen durch den Punkt $A(3|0)$ und haben ihre Scheitel an der Stelle –1?

   b) Gehört die Parabel P_1: $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{15}{2}$ zu der in a) angegebenen Schar P? Zeichnen Sie die Parabel P_1.
   Dem im 1. Quadranten des Koordinatensystems liegenden Flächenstück, das von P_1 begrenzt wird, werden Rechtecke so einbeschrieben, daß die 4. Ecke auf der Parabel P_1 wandert, Wann wird die Fläche des Rechtecks maximal?

   c) Verallgemeinern Sie Teil b), indem Sie eine beliebige Parabel aus der Schar P betrachten.

3. Gegeben ist das Dreieck mit den Ecken $A(-2|0)$, $B(4|0)$ und $C(0|4)$.

   a) Eine beliebige Parallele zur x-Achse ($y = v$) schneidet AC in Q und BC in R. AR und BQ schneiden sich in $P(x|y)$. Drücken Sie die Koordinaten von P durch den Parameter von v aus. Was ist die Ortslinie für P, wenn die Parallele sich verschiebt? Wo liegt der Schwerpunkt des Dreiecks ABC?

   b) Dem Dreieck ist ein Rechteck $QRST$ so einbeschrieben, daß S und T auf AB liegen. Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller solcher Rechtecke?

Aufgabenstellung: StR G. Hö.
Datum: 20.03.1969.

Die Schülerarbeiten der Jahre 1970 bis 1987 sind nicht erhalten. Für das Jahr 1970 ist nur ein einziger Vorschlag für eine schriftliche Abiturarbeit vorhanden, und zwar folgend wiedergegebener. Da auf dem Vorschlag (A) kein Vermerk zur Genehmigung zu finden ist, wurde dieser Vorschlag vermutlich nicht genommen. Wegen der fehlenden Schülerarbeiten kann das aber nicht mehr überprüft werden.

E.23f Reifeprüfung 1970 – Gymnasium für Frauenbildung

1. Von einem Dreieck *ABC* sind die Mittelpunkte der Dreiecksseiten *D(*10|6), *E(*6|5) und *F(*7|3) gegeben. Konstruieren Sie den Umkreis von Dreieck *ABC* und berechnen Sie seine Gleichung!
2. Eine Ellipse geht durch *A(*3|2) und hat die Hauptscheitel (5|0) und (–5|0). Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Nebenscheitel.
   Wie groß ist der Inhalt des einbeschriebenen Parallelogramms, dessen Seiten parallel zu *OA* und zur Tangente in *A* sind?
3. Gegeben sei eine von der Identität verschiedene schiefe Achsenaffinität T_1 mit der *x*-Achse als Affinitätsachse.
   Die Affinitätsstrahlen haben die Steigung $m_1 \neq 0$, der Affinitätsmaßstab ist k_1.
   $$T_1 \begin{cases} x' = x + a_1 y, & \text{wo } a_1 = \frac{k_1 - 1}{m_1} \text{ ist.} \\ y' = k_1 y \end{cases}$$
   a) Wählen Sie speziell $m_1 = 2$; $k_1 = -1$ und ein beliebiges Dreieck als Urbild. Welche schiefe Achsenaffinität T_2 erfüllt folgende 2 Bedingungen?
      1. Die zusammengesetzte Abb. $T_1 \circ T_2$ ist gleich der Abbildung $T_2 \circ T_1$.
      2. Die Abbildung $T_1 \circ T_2$ ist flächentreu.

   b) Wie ergibt sich T_2 im allgemeinen Fall bei beliebigen Werten m_1, k_1?

Aufgabenstellung: OStR G. Hö.

E.24n Reifeprüfung 1971 – Neusprachlicher Zweig

1. a) Die Normale im Wendepunkt *W(*2|2) des Graphen einer ganzen rationalen Funktion 3. Grades schneidet die Kurve ein zweites Mal im Koordinatenursprung. Wie heißt die Funktion? Zeichnen und diskutieren Sie den Kurvenverlauf!
   b) Beachten Sie die Lage der Tangenten in den verschiedenen Kurvenpunkten. Hat die Kurve in einem Punkt die Steigung $m = 1\frac{2}{3}$?
   Zeigen Sie durch Rechnung, welche Tangentensteigungen m, $m \in \mathbb{R}$, die Kurve in keinem Punkt annimmt.
2. Eine Ellipse in Ursprungslage wird von den Geraden
   g_1: $30 - 5y - 6x = 0$ und
   g_2: $10 + 5y + 6x = 0$ so geschnitten, daß g_1 durch den Hauptscheitel, g_2 durch den Nebenscheitel geht.
   a) Wie lautet die Ellipsengleichung?
   b) Beide Geraden schneiden die Ellipse ein zweites Mal. Zeigen Sie, daß die Durchmesser durch diese Schnittpunkte konjugierte Richtungen haben.

c) Konstruieren Sie die Schnittpunkte der Geraden g_1 und g_2 mit der Ellipse.

d) Formulieren Sie den Sachverhalt in b) für ein Parallelenpaar durch den Haupt- und Nebenscheitel einer Ellipse in Form eines Lehrsatzes und beweisen Sie diesen unter Ausnutzung der Affinität zwischen Kreis und Ellipse.

3. Gegeben die Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2$ und die Parallelenschar $y = -\frac{b^2}{2}$, $b \neq 0$. Jede Gerade der Schar schneidet die Parabel in zwei Punkten A und B.

a) Welche Fläche schließen für $b = 1$ die Gerade $x = -4$, je eine Halbtangente in den Punkten A und B und die Parabel ein? Zeichnung!

b) Wie verhalten sich die Fläche F_1 zwischen der Geraden $y = -\frac{b^2}{2}$ und der Parabel und die Fläche F_2 zwischen den Tangenten in A und B und der Parabel für beliebige Parameter b zueinander? Skizze!

Aufgabenstellung: StR E. H.

E.24f Reifeprüfung 1971 – Gymnasium für Frauenbildung

1. a) Untersuchen Sie den Graph der Funktion $y = -\frac{1}{24}x^4 + x^2$ auf Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte, und zeichnen Sie den Graph im Bereich $-5 \leq x \leq 5$. Zeichnen Sie auch das aus den Wendetangenten und den Normalen im Wendepunkt gebildete Viereck ein (LE = 1 cm)!

b) Berechnen Sie die Fläche des in a) angegebenen Vierecks!

c) Betrachten Sie nun die durch die Gleichung $y = ax^4 + x^2$ gegebene Kurvenschar mit dem Parameter $a \neq 0$! Welche Bedingung muß a erfüllen, damit Wendepunkte vorhanden sind?

2. Ein Durchmesser einer zu den Koordinatenachsen symmetrisch liegenden Ellipse hat die Gleichung $y = \frac{2}{5}x$, eine Tangente an die Ellipse hat die Gleichung $y = -\frac{3}{5}x + 6$. Tangente und Durchmesser haben konjugierte Richtungen.

a) Berechnen Sie den Berührpunkt und die Gleichung der Ellipse! Welche Gleichungen haben die zum gegebenen Durchmesser parallelen Tangenten?

b) Konstruieren Sie den Hauptkreis und den Nebenkreis der Ellipse! (LE = 1 cm)

3. Gegeben ist die Funktion $y = x^2 - 2x + 3$.

a) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion, und berechnen Sie die Steigungen der Tangenten an die Parabel, die durch den Koordinatenanfangspunkt gehen! (LE = 1 cm)

b) Jede Gerade des Geradenbüschels $y = kx + 5$ mit dem Parameter *k* schneidet die gezeichnete Parabel in zwei Punkten. Geben Sie die Summe *s* der Abstände, den diese beiden Punkte von der *x*-Achse haben, als Funktion von *k* an, und bestimmen Sie den Wert von *k*, für den diese Summe möglichst klein ist! Geben Sie auch die Koordinaten der Schnittpunkte für diesen Fall an.

Aufgabenstellung: StR G. Ha.

E.25n Reifeprüfung 1972 – Neusprachlicher Zweig

1. Die Gleichung $K(x,y) \equiv (x-c)^2 + (y-c)^2 - \frac{c^2}{4} = 0$ stellt bei veränderlichem *c* (bel. reell) eine Kreisschar dar.
   a) Zeichnen Sie einige Kreise dieser Schar! Welche Gleichung hat der Kreis, der durch $P(6|7)$ geht?
   b) Haben alle Kreise der Schar eine gemeinsame Tangente? Geben Sie deren Gleichung an!
2. Gegeben ist die Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 144$ und die Gerade $2x + 21y - 60 = 0$.
   a) Bestimmen Sie rein geometrisch, ohne die Ellipse zu zeichnen, die Schnittpunkte der Geraden mit der Ellipse (Benutzung der Eigenschaften einer affinen Abbildung).
   b) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten in den Schnittpunkten an die Ellipse?
3. Zeigen Sie, daß die Folge $a_n = \frac{2n+1}{n-1}$ (n = 2, 3, …) monoton ist.
   a) Versuchen Sie den Grenzwert *g* der Zahlenfolge a_n zu erraten und bestimmen Sie zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die kleinste natürliche Zahl n_0 so, daß für alle $n > n_0$ gilt: $\left| a_n - g \right| < \varepsilon$.
   b) Vergleichen Sie den vorigen Grenzwert mit dem Grenzwert von $b_n = \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2$ (n = 2, 3, …). Formulieren Sie den entsprechenden Grenzwertsatz!

Aufgabenstellung: OStR G. Hö.

E.25f Reifeprüfung 1972 – Gymnasium für Frauenbildung

1. Gegeben sei die Kurvenschar $y = tx^3 - 3x^2 + 8x$.
   a) Ermitteln Sie die Kurve der Schar, deren Wendepunkt die *x*-Koordinate $x_w = 3$ hat und zeichnen Sie diese in $[-\frac{1}{2}; 5]$.

b) Welche Fläche schließt die Kurve der Schar mit $t = \frac{1}{3}$ mit der Parabel 2. Grades ein, die durch den Nullpunkt läuft und deren Hochpunkt im Wendepunkt der vorgegebenen Scharkurve liegt?

c) Leiten Sie die Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes einer Kurve aus deren Eigenschaften in der Umgebung des Wendepunktes ab.

2. Gegeben sei ein Kreis K und ein Pol P_0. Für diese gilt der Satz:
Das Quadrat über der Verbindungsstrecke von P_0 und dem Tangentenberührpunkt P_1 ist flächengleich dem Rechteck aus den Sekantenabschnitten der Sekante durch den Kreismittelpunkt und P_0.

a) Bestätigen Sie diesen Satz am Beispiel
K: $x^2 + y^2 + 8x + 12y + 2 = 0$, $P_0(6;14)$.

b) Zeichnung mit Konstruktion der Tangenten. Einheit ≙ 1 Kästchen.

c) Beweisen Sie diesen Satz für einen Kreis mit dem Radius r und einem Pol P_0 mit dem Abstand a vom Kreismittelpunkt.

3. Die parallelen Tangenten an die Parabeln $y = x^2 + 2$ und $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ bilden mit den Symmetrieachsen $x = 0$ und $x = 2$ ein Parallelogramm.

a) Berechnen Sie die Fläche der Parallelogramms für die Tangentensteigung $m = \frac{3}{2}$ und zeichnen Sie Parabeln und Parallelogramm.

b) Für welche Steigung m ergibt sich das flächengrößte Parallelogramm?

Aufgabenstellung: StR E. H.

E.25p Reifeprüfung 1972 – Pädagogisch-musischer Zweig

1. a) Gegeben sind der Kreis $x^2 + y^2 = 25$ und der Punkt $P_1(20|0)$. Die Polare von P_2 steht senkrecht auf der Geraden $-2x + y + 15 = 0$ und schneidet die positive x-Achse an derselben Stelle wie der Kreis. Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Polare von P_1 mit der Polare von P_2!

b) Weisen Sie für das obige Beispiel nach, daß, wenn man von den beiden Polen P_1 und P_2 das Lot auf die Polare des anderen fällt, die Längen dieser Lote sich verhalten wie die Entfernungen der Punkte vom Mittelpunkt des Kreises. (Zeichnung: LE = $\frac{1}{2}$ cm)

2. Gegeben ist die Kurvenschar mit der Gleichung $y = 3 - \frac{1}{2}c^3x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}cx^3$.

a) Berechnen Sie allgemein die Fläche zwischen der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $x = 3$!

b) Für welchen Wert von c hat diese Fläche einen größten Wert?

c) Untersuchen und zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion im Bereich $-2 \leq x \leq 3$! (LE = 1 cm)

3. $y = ax^2 - 3x + \frac{1}{a}$ sei die Gleichung der Parabelschar mit dem Parameter $a \neq 0$.
   a) Zeichnen Sie die zu $a = 1$ gehörige Parabel der Schar (LE = 1 cm)!
   b) Welches ist der geometrische Ort aller Parabelpunkte $P_0(x_0|y_0)$, in denen die Tangentensteigung 1 ist?
   c) Verallgemeinern Sie b), indem Sie als Tangentensteigung m nehmen! Geben Sie hier die Gleichung der Ortskurve nur in der Parameterform an!
   d) Stellen Sie die Tangentengleichung für die Tangente durch $P_0(x_0|y_0)$ mit der Steigung m auf!
   e) Für welche m-Werte geht diese Tangente durch den Nullpunkt? Was läßt sich über das Ergebnis sagen?

Aufgabenstellung: StR G. Ha.

E.26n Reifeprüfung 1973 – Neusprachlicher Zweig

1. Gegeben sind die ganzen rationalen Funktionen $y_{\mathrm{I}} = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{4}x^2$ und $y_{\mathrm{II}} = \frac{1}{4}x^2$.
   a) Untersuchen Sie den Graph von y_{I} auf Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte, und zeichnen Sie die beiden Graphen im Bereich $-1 \leq x \leq 6$ (LE = 1 cm)!
   b) Für welche Abszisse im Bereich $0 < x < 5$ hat die Ordinatendifferenz d der beiden Graphen einen größten Wert?
   c) Bestimmen Sie den geometrischen Ort aller Wendepunkte der durch die Gleichung $y = tx^3 + \frac{3}{4}x^2$ ($t \neq 0$) gegebenen Kurvenschar! Zeichnen Sie die gefundene Ortslinie noch in das Koordinatensystem von a) ein!
2. Aus einer quadratischen Fläche von 10 cm Seitenlänge werden vier kongruente gleichschenklige Dreiecke, deren Grundseiten die Quadratseiten seind, herausgeschnitten, so daß das Netz einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche übrigbleibt.
   a) Stellen Sie die Gleichung des Volumens V der Pyramide als Funktion der Grundkante x der Pyramide auf!
   b) Für welche x-Werte ist V am größten?
   (Beachten Sie: Für die x-Werte, für die V^2 maximal ist, ist auch V maximal.)
   c) Wieviel Prozent der quadratischen Fläche müssen für diesen Fall weggeschnitten werden?
3. An die Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ sei in $P_1(-3|\frac{12}{5})$ die Tangente t_1 gelegt.

a) Fällt man von einem Brennpunkt F der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ das Lot auf eine Ellipsentangente *t*, so ist der Fußpunkt *H* ein Punkt des Hauptkreises der Ellipse.
Beweisen Sie diesen Satz!

b) Konstruieren Sie mit Hilfe dieses Satzes eine beliebige Tangente t_2 an die gegebene Ellipse und ihren Berührpunkt P_2! (LE = 1 cm)

Aufgabenstellung: StR G. Ha.

E.26f Reifeprüfung 1973 – Gymnasium für Frauenbildung

1. t_1: $8x-4y+20=0$ sei Tangente an einen Ursprungskreis.
   a) Bestimmen Sie den Berührpunkt der Tangente.
   b) Bilden Sie den Kreis und Tangente affin im Verhältnis $k=\frac{2}{3}$ ab, und zeigen Sie, daß die Ellipsentangente Bild der Kreistangente ist.
   c) t_2 sei die Kreistangente, die auf t_1 senkrecht steht und den Kreis im I. Quadranten berührt.
   Bestätigen Sie für die Steigungen m_1' und m_2' der Bilder von t_1 und t_2 die Formel $m_1' \cdot m_2' = -\frac{b^2}{a^2}$.
2. a) Gegeben sei die Parabel $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$ und die Gerade *g*: $y=\frac{1}{2}x$.
   Durch den Punkt $P(x<2|y)$ der Parabel seien die Parallelen zur *x*- und *y*-Achse gezogen. Die Gerade *g*, die Parallelen und die Symmetrieachse der Parabel bilden ein Trapez. Für welchen Wert *x* erhält man das Trapez maximaler Fläche? Zeichnung: 1 LE ≙ 2 cm.
   b) Erklären Sie das Verfahren der Anwendung von Mathematik an Extremwertproblemen.
3. Auf Grund einer Bodenanalyse sind zur ausgewogenen Düngung einer landwirtschaftlichen Anbaufläche 24 dz Phosphordünger, 24 dz Kalidünger und 30 dz Stickstoffdünger erforderlich. Im Handel sind zwei verschiedene Volldünger erhältlich, die die fraglichen Stoffe enthalten:
   Dünger I: 15 % Phosphordünger, 10 % Kalidünger, 30 % Stickstoffdünger
   Dünger II: 15 % " , 20 % " , 15 % "
   a) Wieviel Lastwagenladungen zu je 20 dz wird man von jedem Dünger wählen, wenn Dünger I 120 DM und Dünger II 80 DM je Ladung kostet und mehr als 1000 DM nicht ausgegeben werden sollen?
   b) Welche Bedingungen sind für das Lösungspaar unbedeutend (Begründung)?
   c) Wie teuer dürfte das Düngemittel I nur sein, wenn aus der Rechnung ausschließlich der Kauf dieses Mittels folgen soll?

Aufgabenstellung: OStR E. H.

E.26p Reifeprüfung 1973 – Pädagogisch-musischer Zweig

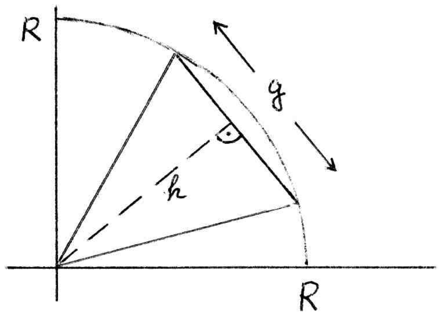
1. a) In die Parabel $y = \frac{1}{4}x^2$ soll das größte gleichschenklige Dreieck *ABC* gezeichnet werden, dessen Spitze *C(*0|6) vorgegeben ist.
   b) Bestimmen Sie die Punkte D_i (i = 1, 2, …) auf der Parabel, für die die Tangenten in D_i senkrecht auf D_iC steht.
2. Die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ berührt die Gerade $x + 2y = 8$ im Punkt *B(*?|2). Konstruieren Sie unter Benutzung einer senkrecht affinen Abbildung die Halbachsen der Ellipse. Bestimmen Sie auch durch Rechnung die Ellipsengleichung!
3. a) Eine Scherung ist gegeben durch die Abbildungsgleichung
   $$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = \quad\; y \end{cases}.$$
   Bleiben bei der Abbildung des Dreiecks *A(*2|3), *B(*4|1), *C(*4|3) Streckenlängen erhalten?
   b) Unter welchen Bedingungen ändern Strecken bei der Scherung
   $\begin{cases} x' = x + ry \\ y' = \quad\; y \end{cases}$ mit $r \neq 0$ ihre Längen nicht?

Aufgabenstellung: OStR G. Hö.

E.27n Reifeprüfung 1974 – Neusprachlicher Zweig

1. Gegeben sei die Funktion *f* durch
   $$y = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} & \text{für } x \geq 0 \\ [x]+1 & \text{für } -2 < x < 0 \\ -\dfrac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{für } x < -2 \end{cases} \qquad \text{in } D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$
   a) Man zeige durch direkten Nachweis der Forderungen der Definition, daß *f* für $x \to \infty$ den Grenzwert g = 2 besitzt.
   b) Man untersuche die Unstetigkeitsstellen von *f* und bestimme insbesondere etwaige Grenzwerte von *f* an diesen Stellen. Ist die Lücke bei $x_0 = -2$ hebbar?
2. Man diskutiere die durch $y = \dfrac{(x-2)(x-4)^2}{(x-1)^2}$ gegebene Funktion und fertige eine Skizze des Schaubildes an.

3. Ein gleichschenkliges Dreieck ist einem Viertelkreis vom Radius R derart einbeschrieben, daß seine Spitze im Kreismittelpunkt und seine Basisendpunkte auf der Peripherie liegen (vgl. Skizze).
   Bei welcher Länge der Grundlinie g wird sein Flächeninhalt ein Maximum? Berechnen Sie den Inhalt dieses Dreiecks.



Aufgabenstellung: Fachhochschullehrer Prof. Dipl.-Math. J. B.

E.27f Reifeprüfung 1974 – Gymnasium für Frauenbildung

1. Eine Parabel 3. Grades geht durch den Ursprung und den Punkt $P(2|5)$. Sie hat in P die Steigung $m = 0{,}9$ und bei $x = 4$ einen Wendepunkt.
   a) Stellen Sie die Gleichung der Parabel auf.
   b) Geben Sie die zugehörige Funktion an und diskutieren Sie diese.
   c) Zeichnen Sie die Parabel.
   d) Wo schneidet die Tangente im Hochpunkt die Parabel?
2. Gegeben das rechtwinklige Dreieck ABC mit den Katheten $\overline{BC} = 8$ cm und $\overline{AC} = 6$ cm. A und B sollen die Brennpunkte einer Ellipse sein, C ein Ellipsenpunkt. Stellen Sie die Gleichung dieser Ellipse auf und berechnen Sie die Koordinaten von C. D sei der Ellipsenpunkt, der senkrecht über A liegt. Stellen Sie die Gleichung der Ellipsentangente in D auf. Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Brennstrahl BD und der Tangente in D. Lösen Sie die Aufgabe auch durch Konstruktion.
3. Durch die Gleichung $x^2 + y^2 - 4ax - 2a^2y + 2a^2 - 1 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ wird eine Kurvenschar bestimmt.
   a) Zeichnen Sie die Kurven für $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $a = -2$.
   b) Zeigen Sie, daß für beliebiges a ein Kreis dargestellt wird.
   c) Zeigen Sie, daß jeder Kreis durch den Punkt $A(0|1)$ geht und die Gerade $y = -1$ berührt.
   d) Zeigen Sie, daß die Mittelpunkte aller Kreis auf einer Parabel liegen und stellen Sie ihre Gleichung auf.

Aufgabenstellung: StD'in E. K.

E.27p Reifeprüfung 1974 – Pädagogisch-musischer Zweig

1. Ein quaderförmiges Betonbecken, das viermal so lang wie breit ist, soll 400 m³ Wasser fassen.
   a) Wie hängt die Oberfläche des nach oben offenen Beckens von der längeren Grundseite ab?

b) Zeichnen Sie den Graphen der Oberflächenfunktion in [–6; 6].
c) Diskutieren Sie die Funktion.
d) Welche Maße hat das Becken mit minimaler Oberfläche?
e) Welche Parabel $y = ax^2$ hat mit dem Graphen der Funktion aus c) keinen Punkt gemeinsam? Diskutieren Sie das Problem geometrisch anschaulich und lösen Sie es analytisch.

2. Durch eine zentrische Streckung werden die Geraden g_1, g_2 auf g_1', g_2' und der Punkt $P \in g_1$ auf P' abgebildet.

   g_1: $y = -\frac{1}{2}x + 2$ $\quad$ g_2: $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{2}$ $\quad$ $P(-3|y_1)$

   g_1': $y' = -\frac{1}{2}x'$ $\quad$ g_2': $y' = \frac{1}{3}x' - \frac{3}{2}$ $\quad$ $P'(-1|y_1')$

   a) Wie lauten die Gleichungen und der Fixpunkt der Abbildung?
   b) Konstruieren Sie das Streckungszentrum und das Bild des Punktes $Q(2|4)$.

3. R sei die Menge der Restklassen von 5, A die Menge der Drehungen um 90°.
   a) Zeichnen Sie die Gruppengraphen zu beiden Verknüpfungsgebilden.
   b) Konstruieren Sie isomorphe Permutationsgruppen zu R und A und diskutieren Sie, ob R und A isomorphe Gebilde sind.
   c) G sei sie Menge der 30°-, B die der 120°-Drehungen. Zerlege G nach A und B. Welchen Index hat die Zerlegung?
   d) Beweisen Sie den Satz:
      Ist G eine Gruppe der endlichen Ordnung g, H eine Untergruppe der Ordnung h von G und i der Index der Zerlegung von G nach H, dann gilt: $g = h \cdot i$.
   e) Warum kann es in der Menge der 3°-Drehungen keine Untergruppe geben, die mehr als 60 Elemente enthält?

Aufgabenstellung: OStR E. H.

E.28n Reifeprüfung 1975 – Neusprachlicher Zweig

1. Mit $f(x) = \frac{3x-u}{x^3}$ ist eine Kurvenschar gegeben.
   a) Diskutieren Sie die Eigenschaften dieser Kurven, insbesondere die gemeinsamen.
   b) Bestätigen Sie analytisch, daß es unter den Flächen, die die Kurven zwischen der Nullstelle und der Geraden $x = u$ mit der x-Achse einschließen, keine extremale Fläche gibt.
   c) Läßt sich für das bis ins Unendliche reichende Flächenstück zwischen der Kurve für u = 3 und der x-Achse ein Flächenmaß angeben?
   d) Welches Volumen hat der Rotationskörper, der durch Rotation der Fläche zwischen der Kurve für u = 3, der x-Achse und der Geraden x = 1 und x = 10 entsteht?

2. Gegeben die Vektoren a und b. α und β seien die Winkel zwischen a + b und a bzw. a + b und b.
   a) Berechnen Sie die Länge von a $\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$ u. b $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ und zeigen Sie, daß für diese Vektoren $\alpha = \beta$ gilt.
   b) Beweisen Sie: Haben die Vektoren a und b gleiche Länge, so halbiert der Vektor (a + b) den Winkel zwischen a und b.
3. Gegeben seien die Ebene

   $$E\text{: w} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

   und die Geraden

   $$g_1\text{: w} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \qquad g_2\text{: w} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-8\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix}$$

   a) Bestimmen Sie durch Untersuchung der linearen Abhängigkeit die Lage der Geraden g_1 und g_2 zur Ebene und
   b) gegebenenfalls den Schnittpunkt.
   c) Welchen Fußpunkt und welche Länge hat das Lot von O auf g_2?
   d) Für den Ortsvektor d des Fußpunktes des Lotes von $O(0|0)$ auf die Gerade $\text{w} = \text{w}_1 + u \cdot \text{a}$ gilt:

   $$\text{d} = \text{w}_1 - \frac{\text{w}_1\text{a}}{\text{a}^2}\text{a}.$$

   Beweisen Sie diese Formel.

Aufgabenstellung: OStR E. H.

E.28f Reifeprüfung 1975 – Gymnasium für Frauenbildung

1. An den Kreis $3x^2 + 3y^2 - 12x - 24y + 30 = 0$ sind die Tangenten vom Ursprung aus und die Tangente in $B(3|7)$ gezeichnet. Welche Fläche hat das Dreieck, das die 3 Tangenten bilden?
2. Gegeben ist die Gerade g: $y = mx$ mit $m > 0$. Auf g liegt der Mittelpunkt $M(a > 0 \mid \cdot\cdot)$ eines Kreises K, der durch $O(0|0)$ geht und die x-Achse in einem 2. Punkt A schneidet.
   a) Die Tangente in A an K schneidet g in P. Bestimmen Sie die Koordinaten von P. F sei der Fußpunkt des Lotes von A auf g. Welche Länge hat AF?
   b) Wenden Sie bei der Berechnung von AF die Winkelfunktionen von $\varphi = \sphericalangle(AOM)$ an. Die Tangente (AP) schneide die y-Achse in B. Welche Länge hat die Strecke AB?
3. Gegeben ist die Abbildung α durch $\begin{cases} x' = x \\ y' = -x + y \end{cases}$

Wenden Sie diese Abbildung auf das Dreieck *ABC* an, wobei $A(1|2)$; $B(7|1)$; $C(3|5)$ ist.

a) Welche Eigenschaften hat die Abbildung α?

b) Auf das Bilddreieck $A'B'C'$ wird nun die Abbildung β angewandt:

$$\beta \begin{cases} x' = -x \\ y' = -x + y \end{cases}$$

Charakterisieren Sie die zusammengesetzte Abbildung $\beta \circ \alpha$. Was läßt sich über $\alpha \circ \beta$ sagen?

Aufgabenstellung: StD G. Hö.

E.28p Reifeprüfung 1975 – Pädagogisch-musischer Zweig

1. Für eine Ware seien die Graphen der Nachfragefunktion und der Angebotsfunktion durch die Gleichungen

   $y_N = -\frac{1}{2}x + 12$ und $y_A = \frac{1}{15}x^2 + \frac{23}{30}x + 2$ $(0 < x < 9)$ gegeben (LE = 1 cm).

   a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtsmenge x_G in Mengeneinheiten (ME) und den Gleichgewichtspreis y_G in Geldeinheiten (GE) pro ME! Wie hoch ist der Gesamterlös?

   b) Berechnen Sie die Konsumentenrente *K*! Welchen Prozentsatz der Konsumentenrente kann eine Firma für sich gewinnen, wenn sie den Preis der Ware vorerst mit 11 GE festsetzt und erst später auf den Marktpreis senkt?

   c) Der Staat bestimmt eine feste Steuerrate *r* so, daß das Steueraufkommen *R* für den Staat maximal wird. Auf wieviel Mengeneinheiten geht in diesem Fall die Nachfrage zurück? Stellen Sie das Problem auch graphisch dar!

2. Gegeben ist Funktion $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2$.

   a) Zeigen Sie, daß der Graph der Funktion der geometrische Ort aller Punkte ist, für welche die Entfernung von $F(0|1)$ gleich dem Abstand von der Geraden *g* mit der Gleichung $y = 3$ ist! *g* heißt Leitgerade der Parabel. *F* heißt Brennpunkt der Parabel. Die Gerade $3x - 4y + 4 = 0$ schneidet die Parabel in zwei Punkten. Legt man in diesen Schnittpunkten Tangenten an die Parabel, so scheinen sich diese nach der Zeichnung auf der Leitgeraden der Parabel zu schneiden und aufeinander senkrecht zu stehen. Prüfen Sie diese Vermutung rechnerisch nach! (LE = 1 cm)

   b) Verschieben Sie das Achsenkreuz so in *y*-Richtung, daß der Brennpunkt der Koordinatenanfangspunkt ist! Zeichnen Sie durch *F* eine beliebige Parabelsehne und die zu ihr parallele Parabeltangente mit dem Berührpunkt *A*! Zeigen Sie, daß die Länge jeder durch den Brennpunkt laufenden Parabelsehne den vierfachen Wert der Länge der Strecke vom Brennpunkt zum jeweiligen Berührpunkt hat!

3. Gegeben ist die Ursprungsgerade g mit der Gleichung $y = mx$ ($m > 0$). Der Mittelpunkt $M(a > 0 \mid y_M)$ eines Kreises K, der durch den Koordinatenanfangspunkt O geht, ist ein Punkt der Geraden g. K schneidet die x-Achse in einem zweiten Punkt A.
   a) Wie lautet die Gleichung des Kreises K?
   b) Stellen Sie die Gleichung der Tangente t auf, die K in A berührt!
   c) F sei der Fußpunkt des Lotes von A auf g. Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte von Dreieck OAF und Dreieck FAM, und diskutieren Sie das Ergebnis!

   Falls Sie Teile der Aufgabe allgemein nicht bearbeiten können, wählen Sie für m einen speziellen Wert!

Aufgabenstellung: OStR G. Ha.

E.29n Reifeprüfung 1976 – Neusprachlicher Zweig

1. Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x$.
   a) Was läßt sich über die Tangenten an den Stellen $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ und $x = -\sqrt{10}$ sagen?
   b) Zeigen Sie, daß jede Tangenten die Kurve noch in einem 2. Punkt schneidet, dessen Abszisse gleich der doppelten negativen Abszisse des Berührpunktes ist.
2. In einem Lehrbuch der Mathematik für das 5. Schuljahr sollen die Resultate folgender Summen miteinander verglichen werden:

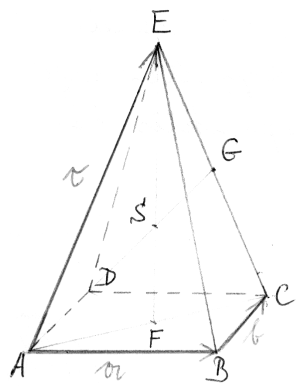
   $1 + 2 = \square$ $\qquad$ $1^3 + 2^3 = \triangle$

   $1 + 2 + 3 = \square$ $\qquad$ $1^3 + 2^3 + 3^3 = \triangle$

   $1 + 2 + 3 + 4 = \square$ $\qquad$ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = \triangle$

   $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \square$ $\qquad$ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \triangle$

   a) Was sollen die Schüler entdecken, welche Frage sollen sie stellen?
   b) Beantworten Sie die Frage durch einen mathematischen Beweis.
3. Eine quadrat. Pyramide (s. Abb.) sei durch die (lin. unabhäng.) Vektoren a, b, $ gegeben. Der Fußpunkt des Lotes von der Pyramidenspitze *E* auf die Grundfläche sei *F*. Mit *G* sei die Mitte der Kante *CE* bezeichnet.
   a) Zeigen Sie, daß die Geraden (*AG*) und (*EF*) in einer Ebene liegen. Drücken Sie $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{FG}$ als Linearkombinationen der gegebenen Vektoren aus!
   b) Bilden Sie die Summe $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SE}$.



Aufgabenstellung: StD G. Hö.

E.29f Reifeprüfung 1976 – Gymnasium für Frauenbildung

1. Es sei $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x - 2$.
   a) Bestimmen Sie die Wendetangente der Kurve.
   b) Welche Fläche schließt der Graph der Funktion mit der Wendetangente zwischen den Parallelen zur *y*-Achse durch den Hochpunkt und die Nullstelle $x_0 < 0$ ein?
   c) Zeichnung in [–5; 3].
2. Gegeben die Parabeln p_1: $y_\mathrm{I} = x^2 + 2$ und p_2: $y_\mathrm{II} = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$.
   a) Bestimmen Sie die Tangenten an diese Parabeln mit der Steigung $m = \frac{3}{2}$. Zeichnung, 1 LE ≙ 2 cm.
   b) Welche Fläche hat das Parallelogramm, das diese Tangenten (in a)) mit den Parallelen zur *y*-Achse im Hoch- bzw. Tiefpunkt bilden?
   c) Für welche Steigung *m* hat das Parallelogramm aus zwei parallelen Tangenten an die Parabeln p_1 und p_2 und den Parallelen zur *y*-Achse durch den Hoch- und den Tiefpunkt den größten Flächeninhalt?
3. Durch eine Streckung S_1 wird die Strecke *A(*3,5;–2) *B(*2;4) auf die Strecke *A*'(–2,5;2) *B*'(–2;0) abgebildet.
   a) Bestimmen Sie die Abbildungsgleichung S_1 und zeichnerisch das Streckungszentrum.
   b) Bilden Sie $A'B'$ nacheinander mit den Streckungen
   $S_2 \begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = -y + 5 \end{cases}$ und $S_3 \begin{cases} x' = 3x - 1 \\ y' = 3y + 11 \end{cases}$ ab (Zeichnung und Rechnung).
   c) Bestätigen Sie analytisch, daß
      I. die drei Streckungszentren auf einer Geraden liegen und
      II. die Verkettung der drei Abbildungen die identische Abbildung ergibt.

Aufgabenstellung: OStR E. H.

E.29p Reifeprüfung 1976 – Pädagogisch-musischer Zweig

1. a) Diskutieren Sie die Funktion *f*: $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ und zeichnen Sie den Graphen der Funktion im Intervall [–4; 4], die Asymptote und die Tangenten in den Schnittpunkten des Graphen mit der *x*-Achse.
   b) Konstruieren Sie den Kreis, der den Graphen von *f* in seinen Schnittpunkten mit der *x*-Achse berührt und stellen Sie die Kreisgleichung auf.
   c) Dier Gerade *g*: $y = -3$, der Graph von *f* und der Kreisbogen, der oberhalb der *x*-Achse verläuft, schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt.
2. Im dreidimensionalen Punktraum $\mathbb{R}^3$ ist das Viereck *ABCD* durch *A(*1|–3|–2), *B(*–4|–3|–7), *C(*–3|5|–2), *D(*5|9|8) gegeben.

a) Zeigen Sie, daß die vier Punkte in einer Ebene liegen und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an. Ist das Viereck ein Parallelogramm?

b) In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt von *AC* und *BD* die Strecke *BD*? Liegt der Punkt $E(4|0|-2)$ auf der Projektion der Strecke *AC* in die x_1x_3-Ebene? Welche besondere Lage hat die Projektion der Geraden *AC*?

c) Die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ r \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ stellt für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Gerade dar. Zeigen Sie, daß alle Geraden dieser Schar in einer Ebene liegen und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an.

3. Eine zur y-Achse symmetrische Parabel 2. Ordnung mit dem Scheitel $A(0|-a)$, $0 < a < 6$ berührt die Gerade g: $y = 2x - 6$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Berührpunktes *B* und die Gleichung der Parabel in Abhängigkeit von *a*. Fertigen Sie für $a = 2$ eine Zeichnung an.

b) Die Parabel begrenzt im 4. Quadranten mit den beiden Koordinatenachsen eine Fläche. Für welchen Wert von *a* nimmt der Flächeninhalt ein Extremum an? Von welcher Art ist dieses Extremum?

c) Das Flächenstück wird um die *y*-Achse gedreht. Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers. Für welchen Wert von *a* wird dieses Volumen durch die mitrotierende Abszisse des Berührpunktes halbiert?

Wenn Sie den Teil a) der Aufgabe nicht lösen können, benutzen Sie für b) und c) die Parabelgleichung $y = \frac{1}{6-a}x^2 - a$.

Zeichnen Sie in Ihre Zeichnung auch die Parabel ein, die einen extremalen Flächeninhalt bestimmt.

Aufgabenstellung: StD'in E. K.

F. Abitur der reformierten Oberstufe 1977 bis 2006

F.1LK Abitur 1977 – Leistungskurs

1. Es sei $f(x)$: $x \to x^3 + 2x - 1$ und $g(x)$: $x \to \sin 2\pi x - 1$.
   a) Bestätigen Sie, daß die beiden Kurven den gleichen Wendepunkt haben und bestimmen Sie den Schnittwinkel beider Graphen.
   b) Ist x_0 Nullstelle einer in einer Umgebung $U(x_0)$ differenzierbaren Funktion $h(x)$, so gilt als Näherungswert der Nullstelle $x_0 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)}$, wenn $x_1 \in U(x_0)$ und $h'(x_1) \neq 0$ ist.
   I. Bestimmen Sie nach dieser Formel die Nullstelle von $f(x)$.
   II. Leiten Sie die Formel her.
2. Es gilt der Satz: In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Lotlängen von einem Punkt im Innern des Dreiecks auf die Seiten gleich der Höhe des Dreiecks.
   a) Bestätigen Sie die Gültigkeit dieser Behauptung für das Dreieck $A(-2\sqrt{3};-2)$ $B(2\sqrt{3};-2)$ $C(0;4)$ und den Punkt $P(1;-1)$.
   b) Fertigen Sie eine Zeichnung zu a) an.
   c) Beweisen Sie die Behauptung für einen beliebigen Punkt P mit dem Ortsvektor x im Dreieck ABC.
3. Gegeben die Funktionenschar f_a: $x \to a \cdot e^{-2x}(x-a) \cdot x$.
   a) Zeichnen Sie die Kurven der Schar für $a = 2$ und $a = 3$.
   b) Ermitteln Sie die Stellen mit waagerechter Tangente, die Gleichungen der Tangenten in den Nullstellen und beschreiben Sie die mit der Änderung von a verbundene Änderung des Kurvenverlaufs.
   c) Welche Fläche schließt die Kurve mit $a = 3$ mit der x-Achse ein?
   d) Errechnen und deuten Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n 3e^{-2x}dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabenstellung: OStR E. H.

F.1GK Abitur 1977 – Grundkurs

1. Gegeben ist die Funktionenmenge $\{ x \to ax^2 - a + 4 \mid a \neq 0 \}$.
   a) Zeichnen Sie für $a = -\frac{1}{2}$ den Graphen der zugehörigen Funktion! (LE = 1 cm)
   b) In die Fläche, die der in a) angegebene Graph mit der x-Achse einschließt, wird ein symmetrisches Trapez einbeschrieben, dessen größere Grundseite die Strecke ist, die der Graph aus der x-Achse ausschneidet. Welches von allen möglichen Trapezen hat den größten Flächeninhalt?

c) Bestimmen Sie $u > 3$ so, daß die Gerade $x = u$ mit der x-Achse und dem in a) angegebenen Graphen ein Flächenstück mit dem Inhalt 9 QE begrenzt!

d) Wählen Sie für die Funktionenmenge ein $a > 0$ so, daß die Fläche, die von dem zugehörigen Graphen und der Geraden $y = 4$ eingeschlossen wird, den Inhalt 4 QE hat!

2. a) Im dreidimensionalen Punktraum sind die Punkte $A(-4|-3|-9)$, $B(-3|5|-4)$, $C(5|9|6)$ und $D(1|-3|-4)$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Geraden AC und BD sich schneiden, und bestimmen Sie ihren Schnittpunkt S!

b) Zeigen Sie, daß das in a) angegebene Viereck $ABCD$ kein Parallelogramm ist! Wählen Sie einen Punkt A' so, daß die Punkte A', B, C und D die Eckpunkte eines Parallelogramms sind!

c) Für jedes $u \in \mathbb{R}$ wird durch die Gleichung $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ u \\ 5 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, eine Gerade durch den Punkt C dargestellt. Prüfen Sie nach, ob die Geraden AC und BC Elemente dieser Geradenmenge sind! Liegen alle Geraden dieser Geradenmenge in einer Ebene?

[Sonderaufgabe für eine Schülerin nach alter Prüfungsordnung:]

3. Der Graph einer ganzen rationalen Funktion 4. Grades f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to ax^2 - bx^4$ hat im Punkt $T(2|4)$ eine waagerechte Tangente.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und skizzieren Sie den Graphen!

b) Zeigen Sie, daß sich die Ordinaten der Hochpunkte zu denen der Wendepunkte wie 9 : 5 verhalten!

c) Prüfen Sie, ob diese Beziehung für alle Graphen der Funktionenmenge $\{ x \to ax^2 - bx^4 \mid a > 0,\ b > 0 \}$ gilt!

Aufgabenstellung: OStR G. Ha.

F.2LK — Abitur 1978 – Leistungskurs

1. Gegeben die Funktion f: $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 & \text{für } -\infty < x < 0 \\ xe^{x-2} & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ \frac{-x}{x-3} & \text{für } 2 < x < \infty \end{cases}$

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit und untersuchen Sie ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.

b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema, die Intervalle in denen f monoton ist und zeichnen Sie den Graphen von f.

c) $f(x) = xe^{x-2}$, $x \in \mathbb{R}$. Stellen Sie eine Formel für $f^{(n)}(x)$ auf.

2. a) Beweisen Sie, daß in einem 3-dimensionalen Vektorraum V die Abbildung V × V → $\mathbb{R}$: (xy) $\mapsto (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + 3x_2y_2 + x_3y_3$, wobei x_i, y_i Koordinaten bezüglich einer festgewählten Basis sind, eine Skalarmultiplikation ist.

b) Der euklidische Punktraum A^3 habe die in a) angegebene Skalarmultiplikation. In diesem Raum seien die Geraden

g_1: x = $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ g_2: x = $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $t, s \in \mathbb{R}$

gegeben. Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden und bestimmen Sie eine Gleichung des Punktraumes A kleinster Dimension, für den gilt: $g_1 \subseteq A \wedge g_2 \subseteq A$.

c) Durch g_r: x_r = $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ r \\ 6 \end{pmatrix}$, $t, r \in \mathbb{R}$ ist eine Geradenschar gegeben.

Zeigen Sie, daß alle Geraden der Schar in einer Ebene liegen und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an. Weisen Sie nach, daß eine Gerade dieser Schar mit g_1 identisch ist. Zeichnen Sie einige Geraden der Schar.

3. Gegeben die Funktionenschar f_a: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_a(x) = \frac{a-e^x}{ae^x}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Bestimmen Sie soweit vorhanden die Achsenschnittpunkte, Hoch-Tiefpunkte und Asymptoten und zeichnen Sie die Graphen für $a = 2$, $a = -2$, $a = 1$ in ein Koordinatensystem. (Wertetabelle für $x = \pm 1, \pm 2$, Einheit 2 cm)

b) Zeigen Sie, daß für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Umkehrfunktion f_a^{-1} existiert und geben Sie diese und ihre erste Ableitungsfunktion an.

c) Zu jedem $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine Integralfunktion

F_a: $D_{F_a} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto F_a(x) = \int_0^x f_a(t)\,dt$.

Bestimmen Sie D_{F_a} und die lokalen Extrema von F_a. Welche Aussagen können Sie über die Nullstellen von F_a machen? Geben Sie eine integralfreie Darstellung von $F_a(x)$ an.

Aufgabenstellung: StD'in E. K.

F.3LK Abitur 1979 – Leistungskurs

1. Gegeben ist die Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) = \begin{cases} x + e^{1-x} & \text{für } -\infty < x \leq 1 \\ 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2}x & \text{für } 1 < x < \infty \end{cases}$

a) Untersuchen Sie, ob *f* über $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist, bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen von *f* mit den Achsen, und zeichnen Sie den Graphen im Bereich $0 \le x \le 2$ (LE = 3 cm).

b) Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ $(0 < u \le 1)$ schneidet den Graphen von *f* in *P* und die Gerade *g* mit der Gleichung $y = x$ in *Q*. Bestimmen Sie *u* so, daß der Flächeninhalt *F* des Dreiecks *OQP* (*O* ist der Ursprung des Koordinatensystems) möglichst groß wird. Kann für $u \in]1, \frac{4}{3}]$ ein noch größerer Flächeninhalt entstehen?

c) Eine Gerade l mit der Gleichung $y = mx$ schneidet den Graphen *K* der Funktion *h*: $[0,2] \to [0,2]$, $x \to 2\sin\frac{\pi}{2}x$ im Punkt *S*. *K* und l umschließen eine Fläche mit dem Inhalt A_1. *K*, l und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ umschließen eine Fläche mit dem Inhalt A_2. Bestimmen Sie *m* so, daß A_1 gleich A_2 ist.

2. Im euklidischen Raum A^3 sind die Punkte $A(2|1|2)$, $B(4|-2|4)$ und $C(0|-3|4)$ gegeben.

a) Berechnen Sie im Dreieck *ABC* den Winkel *α*. Bestimmen Sie den zur Höhe h_b gehörenden Höhenfußpunkt *P* und seine Lage auf der Strecke $\overline{AC}$.

b) Für einen zweidimensionalen euklidischen Punktraum gilt der Satz:

„Ein Dreieck, das von den Vektoren u = $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und + = $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird, hat den Flächeninhalt $F = \frac{1}{2} \cdot | u_1 s_2 - u_2 s_1 |$."

Bilden Sie das Dreieck *ABC* durch eine senkrechte Projektion auf die x_1x_2-Ebene ab, und berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel den Flächeninhalt des Bilddreiecks *A'B'C'*.

c) Beweisen Sie den in b) angegebenen Satz.

3. Gegeben ist die Funktionenschar f_a: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \to f_a(x) = \ln x \cdot (\ln x - 2a)$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen, den Extrempunkt und die Asymptoten der Graphen der zugehörigen Graphenschar. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Graphen. Skizzieren Sie für $a = 0$ den Graphen im Bereich $0 < x \le 5$ (LE = 2 cm).

b) Zeigen Sie, daß die Funktion f_0: $]0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to (\ln x)^2$ eine Umkehrfunktion *g* besitzt, und beweisen Sie, daß die Funktion *G*: $D \to \mathbb{R}$, $x \to -2e^{-\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} + 1) + C$ Stammfunktion von *g* ist. Berechnen und deuten Sie $\lim\limits_{u \to 0} \int_u^1 f_0(x)\,dx$, $0 < u < 1$.

c) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ ist durch F_a: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$: $x \mapsto F_a(x) = \int_1^x f_a(t)\,dt$ eine Integralfunktion gegeben.
Welche Aussagen können Sie über die lokalen Extrema von F_a machen?

Aufgabenstellung: OStR G. Ha.

F.3GK — Abitur 1979 – Grundkurs

1. Ein Spielautomat besteht aus drei voneinander unabhängigen Laplace-Rädern mit je acht gleichgroßen Sektoren, die mit 1 bis 8 bezeichnet sind. Die Ereignisse erscheinen als dreistellige Zahlen XYZ (wobei X, Y, $Z \in \{1; 2; \ldots ; 8\}$). Der Einsatz beträgt 10 Pf. Für die Gewinne sind die Quersummen der Ereignisse ausschlaggebend: Für die vier höchsten Quersummen wird das jeweils Zehnfache der Quersumme in Pfennigen ausgezahlt.
   a) Bestimmen Sie die Zufallsvariable $X(\omega)$ und erstellen Sie deren Verteilung.
   b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ aus der Sicht des Spielers.
   c) Die drei Laplace-Räder seien nunmehr in n Felder mit den Zahlen 1 bis n aufgeteilt ($n \in \mathbb{N}$). Lösen Sie dafür die Unteraufgaben a) und b) entsprechend.
2. Gegeben ist die auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion f mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = x + 3 - \frac{4}{x^2}$.
   a) Bestimmen Sie die Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte von f. Zeigen Sie, daß die Gerade mit der Gleichung $g(x) = x + 3$ eine Asymptote von f ist. Zeichnen Sie den Graphen von f und die Asymptote.
   b) Bestimmen Sie den Inhalt des vom Graphen von f, der Asymptoten g und den Geraden m. d. Gl. $x = 1$ und $x = 4$ begrenzten Flächenstücks.
   c) Wie groß ist das im 1. Quadrant vom Graphen von f, der Asymptoten g und der Geraden m. d. Gl. $x = 1$ begrenzte Flächenstück? Wie groß wird das Flächenstück, wenn man statt $x = 1$ als linke Begrenzung $x = 0$ wählt?

Aufgabenstellung: StR B. S.

F.4LK Abitur 1980 – Leistungskurs

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2} & \text{für } |x| \geq 1 \\ f_2(x) = -\frac{15}{4}x^2 + 8 & \text{für } |x| < 1 \end{cases}$

   a) Untersuchen Sie die Funktion *f* auf Differenzierbarkeit. An welchen Stellen ist *f* stetig?

   b) Bestimmen Sie diejenigen Stellen, an denen *f* lokale Maxima oder Minima besitzt und zeigen Sie, daß *f* für $|x| > 1$ links- und für $|x| < 1$ rechtsgekrümmt ist. Was können Sie aus dem Krümmungsverhalten schließen?

   c) Zeichnen Sie den Graphen G_f und den Graphen G_g der Funktion $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ im Intervall [–3; 3] (LE = 1 cm).

   Der Graph G_f, der Graph G_g, die Geraden $x = 0$ und $x = u$ ($u > 1$) schließen eine Fläche ein. Zeichnen Sie eine solche Fläche in das vorhandene Achsenkreuz ein und bestimmen Sie den Flächeninhalt $A(u)$ dieser Fläche. Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$ und deuten Sie diesen Grenzwert geometrisch.

2. In einer Urne befinden sich 10000 Kugeln. Man vermutet, daß 10 % von ihnen weiße, der Rest schwarze Kugeln sind. Der Urne werden 100 Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Sollten weniger als 5 und mehr als 15 Kugeln weiß sein, so entschließt man sich, von der Vermutung p = 10 % abzugehen.

   a) Geben Sie eine obere Schranke für die Irrtumswahrscheinlichkeit bei dieser Entscheidungsregel an.

   b) Wie muß man die Entscheidungsregel ändern, damit die Irrtumswahrscheinlichkeit für die Hypothese p = 10 % kleiner als 15 % ist?

   c) Eine andere Entscheidungsregel lautet wie folgt:
   Man ziehe 10 Kugeln mit Zurücklegen. Kommt in dieser Stichprobe höchstens eine weiße Kugel vor, so nimmt man die Hypothese p = 10 % an, sind mehr als zwei Kugeln weiß, so lehnt man die Hypothese ab. Sind genau zwei Kugeln weiß, so zieht man ein zweites Mal 10 Kugeln mit Zurücklegen und nimmt die Hypothese nur dann an, wenn in dieser Stichprobe keine weiße Kugel mehr vorkommt. Geben Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit bei dieser Entscheidungsregel an.

3. Für jedes $a > 0$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a^2 \cdot (x + \frac{1}{a}) \cdot e^{-ax}$; $x \in \mathbb{R}$.

   a) Untersuchen Sie die Funktionen f_a auf Null-, Extrem- und Wendestellen und berechnen Sie $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x)$. Zeichnen Sie G_{f_1} im Intervall [–1,5; 4] (LE = 2 cm).

b) Es sei y_a die Tangente an den Graphen G_{f_a} im Punkte $x = \frac{1}{a}$. y_a bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt dieses Dreiecks von a unabhängig ist.

c) Gegeben ist die Funktion $\varphi_1(z) = \int_{-1}^{z} f_1(x)\,dx$; $z > -1$. Berechnen Sie $\varphi_1(z)$ für $z > -1$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch. Bestimmen Sie die Wendestelle von φ_1 und geben Sie die Koordinaten des Wendepunktes an.

Aufgabenstellung: StR Dr. W. S.

F.4GK — Abitur 1980 – Grundkurs

Der ausgewählte Vorschlag fehlt in den Akten.

Aufgabenstellung: OStR E. H.

F.5LK — Abitur 1981 – Leistungskurs

1. Gegeben sei ein Viereck *PQRS* durch die Ortsvektoren p, q, r, + seiner Ecken. Die Eckpunkte seien mit gleichen Massen belegt. S_1 sei der Schwerpunkt von Dreieck *PQR*, S_2 sei der Schwerpunkt von Dreieck *RSP*.
   a) Untersuchen Sie, ob die Mitte *M* der Strecke S_1S_2 Schwerpunkt S_3 des Vierecks *PQRS* ist.
   b) Für welche besonderen Vierecke ist die Mitte *M* Schwerpunkt? Wo liegt dann der Schwerpunkt S_3?
   c) Wählen Sie für eine Zeichnung drei Punkte *P*, *Q*, *R*, die durch p, q, r gegeben sind. Konstruieren Sie den Ortsvektor + des 4. Punktes *S* so, daß ein Viereck wie in b) entsteht.
   d) Gilt + = r, so wird das Viereck zu einem Dreieck *PQR*, in dem der Eckpunkt *R* mit der doppelten Masse belegt ist. Wo liegt jetzt der Schwerpunkt S_3?
2. Der Graph der Funktion f_1: $x \to ax^3 + bx^2 + cx + d$, $x \in \mathbb{R}$ schneidet den Graphen von f_2: $x \to \frac{1}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ an der Stelle 4 rechtwinklig. Beide Kurven haben ihren Tiefpunkt *T* gemeinsam.
   a) Welche Funktionsgleichung hat f_1?
   b) Zeichnen Sie beide Graphen in $0 \le x \le 6$. Bestimmen Sie den Wendepunkt des Graphen von f_1 und benutzen Sie ihn, um ohne wesentliche Rechnung den Hochpunkt *H* zu finden.
   c) Schwächt man die oben genannten Bedingungen für f_1 ab und verlangt man nur, daß sich die Graphen von f_1 und f_2 an der Stelle 4 schneiden, so erhält man eine Schar von Kurven. Geben Sie diese an mit *b* als

Parameter. Welche Kurve aus dieser Schar hat ihren Hochpunkt an der Stelle 4?

3. a) Eine ganzrationale Funktion 2. Grades p_2 stimmt mit der durch $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ gegebenen Funktion f an der Stelle 0 im Funktionswert und in den Werten der 1. und 2. Ableitung überein.
   Wie lautet p_2? Zeichnen Sie die Graphen von f und p_2 für $-\pi \le x \le \pi$ in ein Koordinatensystem ein (1 LE = 2 cm).
   b) Eine ganzrationale Funktion 4. Grades p_4 stimmt mit der Kosinusfunktion an der Stelle 0 im Funktionswert sowie in den Werten der ersten 4 Ableitungen überein.
   Wie lautet p_4? Vergleichen Sie die Nullstellen von f und p_4 in $[-\pi, \pi]$.
   c) Für zwei in $0 \le t \le x$ stetige Funktionen g und h gelte: $g(t) \le h(t)$ für $t \in [0, x]$. Dann gilt: $\int_0^x g(t)\,dt \le \int_0^x h(t)\,dt$.
   Zeigen Sie, daß durch wiederholte Anwendung dieses Satzes aus $\sin t \le t$ folgt: $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Aufgabenstellung: StD G. Hö.

F.5GK Abitur 1981 – Grundkurs

1. Gegeben die Funktionenschar f_a: $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_a(x) = x + \frac{a-1}{x} - a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   a) Untersuchen Sie allgemein die Funktionen f_a auf Null-, Extrem- und Wendestellen. Untersuchen Sie auch das Verhalten der Funktionen f_a für sehr große und sehr kleine Werte von x. Zeichnen Sie die Graphen für $a = 0$ und $a = 3$.
   b) Zeigen Sie: Die Funktionen f_a besitzen entweder Extremstellen oder sind streng monoton steigend.
   c) Gibt es für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ eine Gerade g: $g(x) = mx$ mit $m \in \mathbb{R}$, die den Graphen f_a berührt? Berechnen Sie m in Abhängigkeit von a und die Abszisse des Berührpunktes.
2. Gegeben die Geraden g_1: x = a + λu und g_2: x = b + μv,
   $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, ON-Basis.
   a) Welche Lage haben die Geraden g_1, g_2 zueinander?
   b) Die Gerade g_1 liegt in der Ebene E, die Gerade g_2 ist parallel zur Ebene E. Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E auf (Parameter der Koordinatengleichung). Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen.

c) Bestimmen Sie den Abstand, den die Gerade g_2 von der Ebene E hat. Welche Bedeutung hat dieser Abstand für die Gerade g_1?

Aufgabenstellung: StD'in E. K.

F.6LK — Abitur 1982 – Leistungskurs

1. a) V und W seien Vektorräume und A: V → W eine lineare Abbildung. Zeige, daß Bild$A$ ein Unterraum von W und Kern$A$ ein Unterraum von V ist.

   b) Löse folgendes System von Gleichungen mithilfe der linearen Algebra.

$$(*)\quad \left|\begin{array}{ll} x+y+z & =2 \\ \wedge\ \ 4x+y & =4 \\ \wedge\ \ 2x & =8 \end{array}\right.$$

   i) Gib die zu diesem System gehörige Matrix A an.

   ii) Gib die Mengen Bild$A$ und Kern$A$ an. Um welchen Typ einer linearen Abbildung A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ handelt es sich?

   iii) Bestimme die inverse Matrix A^{-1} von A.

   iv) Löse mit diesen Kenntnissen das System $^{(*)}$.

   c) Von einer ganzrationalen Funktion 2. Grades ist bekannt $f(1)=1$; $f'(2)=\pi$; $f''(4)=e$. Stelle ein System von Gleichungen für die Koeffizienten der Funktion auf und löse es.

2. a) Weise nach, daß $e^x > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Benutze hierzu das Monotonieverhalten von g: $x \mapsto e^x - x$.

   b) Zeige, daß h: $x \mapsto e^{x-\frac{1}{2}x^2}$ die x-Achse zur Asymptote hat. Warum gilt dies dann auch für die Funktion f: $x \mapsto x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$? Vorsicht bei der Betrachtung für $x \to -\infty$! Welche globale Eigenschaft von f gewährleistet das Ergebnis für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gleichermaßen?

   c) Bestimme die Nullstellen der Funktion f: $x \mapsto 4xe^{-\frac{1}{2}x^2}$, ferner deren Extrema, Wendestellen, Symmetrie – und asymptotisches Verhalten. (Zu letzterem benutze die Ergebnisse aus Teil a) und b).)
   Fertige eine Skizze des Graphen an. (Einheiten: 1 cm auf der x- und y-Achse)

   d) Bestimme für eine gedachte Grenze $u \in \mathbb{R}_+$ die Fläche zwischen x-Achse und der Kurve im Bereich [0, u].

   e) Existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty 4xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx$?

3. Es sei die Funktionenschar f_a: $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2} & x < a \\[2ex] 1-\frac{a}{x} & a \le x \end{cases}$

mit Parameter $a \in \mathbb{R}_+$ gegeben.

a) Zeige, daß die Funktionen f_a stetig sind.

b) Verlaufen die Graphen der Funktionen f_a bei $x = a$ ohne Knick?

c) Fertige eine Kurvendiskussion für die f_a ($a \in \mathbb{R}_+$) an und skizziere den Graphen von f_2. (Einheiten: 2 cm auf der x- und y-Achse)

Aufgabenstellung: StR Dr. M. L.

F.6GK — Abitur 1982 – Grundkurs

1. Gegeben seien die Funktionen f_a durch $f_a(x) = -x^3 + 3a \cdot x^2$; $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
   a) Bestimmen Sie für jedes $a > 0$ die Nullstellen, den Hochpunkt, den Tiefpunkt und den Wendepunkt von f_a. Stellen Sie die Gleichung der jeweiligen Wendetangente auf. Für welchen Wert von a geht sie durch den Punkt $A(0|-1)$?
   b) Zeichnen Sie den Graphen G_{f_1} einschließlich der zugehörigen Wendetangente im Intervall $[-1; 3{,}5]$ (1 LE = 1 cm).
   c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_{f_1} und der Tangente im Hochpunkt umschlossen wird. Schraffieren Sie diese Fläche in Ihrem Schaubild.
2. Eine Urne enthält 3 schwarze, 5 rote und 2 weiße Kugeln. Der Urne werden mit einem Griff 3 Kugeln entnommen.
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben alle 3 Kugeln dieselbe Farbe?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, von jeder Farbe eine Kugel zu ziehen?
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens 2 Kugeln dieselbe Farbe?
   d) Es sei X die Anzahl der schwarzen unter den gezogenen Kugeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$ und zeichnen Sie ein Strichdiagramm.

Aufgabenstellung: StR Dr. W. S.

F.7LK — Abitur 1983 – Leistungskurs

Der ausgewählte Vorschlag fehlt in den Akten.

Aufgabenstellung: OStR E. H.

F.7GK Abitur 1983 – Grundkurs

Der ausgewählte Vorschlag fehlt in den Akten.

Aufgabenstellung: StR z. A. H. S.

F.8LK Abitur 1984 – Leistungskurs

1. Gegeben die Funktion f: $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \ln(|x| + 0{,}25)$.
   a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f, die Symmetrieeigenschaften des Graphen, die Nullstellen von f, die erste Ableitung von f mit ihrem Definitionsbereich und den Wertebereich von f. Zeichnen Sie dann mit Hilfe Ihrer Ergebnisse und einer Wertetabelle den Graphen von f.
   b) Berechnen Sie die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.
   c) Die Graphen der Funktionen
   g_a: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g_a(x) = \frac{1}{a}[\ln(x + 0{,}25)]^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ schneiden den Graphen von f. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte und beweisen Sie, daß es für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ genau 2 Schnittpunkte gibt. Gilt das auch für $a \in \mathbb{R}^-$? Zeigen Sie, daß von den Winkeln, die die Graphen $a > 0$ in den Schnittpunkten bilden, nur einer von a abhängt. Geben Sie diesen für $a = 2$ an. Zeichnen Sie den Graphen von g_a für $a = 2$ in das vorhandene Koordinatensystem ein und überprüfen Sie Ihre Winkelberechnung an der Zeichnung.
2. In einem euklidischen Vektorraum mit ON-Basis sind die Punkte $A(2|3|1)$, $B(3|5|3)$ und die Ebene e gegeben.

   $$e\colon \mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

   g sei die Gerade AB und g' die Projektion von g auf die 1,2-Ebene.
   a) Zeigen Sie, daß die Gerade g die Ebene e in einem Punkt s schneidet. Stellen Sie eine Gleichung für g' auf und berechnen Sie den Winkel, den g und g' und den g und e bilden. Welchen Abstand hat A von e? Zeichnen Sie g und g'.
   b) Durch $(4 + 2a)x_1 + 8x_2 + (2 - a)x_3 - (3a + 10) = 0$ wird für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Ebene e_a bestimmt. Gehört die Ebene e zu dieser Ebenenschar? Für welchen Wert von a steht die Ebene e_a senkrecht auf der Ebene e? Stellen Sie die Gleichung dieser zu e senkrechten Ebene der Schar auf.
   c) Durch die Punkte $P(-2|0|1)$, $Q_b(1 + 2b\,|\,2b\,|\,4 - 2b)$ und $Q_{b+1}(3 + 2b\,|\,2b + 2\,|\,2 - 2b)$ mit $b \in \mathbb{R}$ werden Dreiecke bestimmt. Zeigen Sie, daß alle Dreiecke in der Länge einer Seite übereinstimmen.

Für welches b ist das Dreieck gleichschenklig? Geben Sie die Eckpunkte dieses Dreiecks an.
Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den folgenden Satz über gleichschenklige Dreiecke:

In jedem gleichschenkligen Dreieck ABC steht die Seitenhalbierende der Basis senkrecht auf der Basis.

3. Gegeben die Funktionenschar f_a: $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_a(x) = \frac{a-e^{2x}}{ae^{2x}}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   a) Bestimmen Sie, soweit vorhanden, die Nullstellen und lokalen Extrema der Funktionen f_a und ihre Asymptoten. Zeichnen Sie den Graphen für $a = 0{,}5$; $a = -0{,}5$ und $a = 2$ in ein Koordinatensystem ein. Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen in Abhängigkeit von a.
   b) Zeigen Sie, daß für jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Umkehrfunktion f_a^{-1} existiert und geben Sie diese und ihre erste Ableitungsfunktion an.
   c) Zeigen Sie, daß zu jedem $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Integralfunktion

      $F_a(x) = \int_0^x \frac{a-e^{2t}}{ae^{2t}}dt$ existiert.

      Welche Aussagen können Sie auf Grund Ihrer bisherigen Berechnungen über Nullstellen und lokale Extrema der Funktionen F_a machen? Geben Sie eine integralfreie Darstellung von $F_a(x)$ an und überprüfen Sie Ihre Aussage soweit möglich.

Aufgabenstellung: StD'in E. K.

F.8GK Abitur 1984 – Grundkurs

1. Gegeben sind die Funktionen f und g durch $f(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und $g(x) = \frac{1}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Zeichnen Sie die beiden Graphen im Bereich $-4 \le x \le 4$ (LE = 1 cm)!
   b) Ein zur y-Achse symmetrisches Rechteck, dessen Eckpunkte auf den Graphen von f und g liegen, soll so bestimmt werden, daß der Umfang des Rechtecks minimal ist.
   c) Die Graphen von f und g schließen mit den Graphen $x = 1$ und $x = u$ ($u > 1$) eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt $A(u)$ dieser Fläche, und ermitteln Sie $\lim\limits_{u\to\infty} A(u)$! Interpretieren Sie das Ergebnis!
   d) Der Graph von f gehört zur Graphenschar mit der Gleichung $f_a(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{ax^2}{4}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, daß die Graphen von f_a genau dann Tiefpunkte haben, wenn sie keine gemeinsamen Punkte mit der x-Achse besitzen!

2. Im euklidischen Punktraum R³ ist das Dreieck *ABC* durch die Punkte *A(*2|1|2), *B(*4|–2|4) und *C(*0|–3|4) gegeben. *O* sei der Ursprung des Koordinatensystems.
   a) Berechnen Sie den Winkel ε (0° < $\omega(\varepsilon)$ < 90°), den die Gerade *OA* und die Seitenhalbierende s_a des Dreiecks *ABC* miteinander bilden! Wie lang ist die Strecke $\overline{AB}$?
   b) Bestimmen Sie den zur Höhe h_b gehörenden Höhenfußpunkt *F* und seine Lage auf der Strecke $\overline{AC}$! Intrepretieren Sie das Ergebnis!
   c) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ wird durch $P(52|a|a^2)$ ein Punkt in R³ gegeben. Wie muß *a* gewählt werden, damit die Punkte *O* und *P* auf derselben Seite der durch *A*, *B* und *C* gehenden Ebene *E* liegen und der Abstand des Punktes *P* von *E* doppelt so groß wie der des Punktes *O* von *E* ist?

Aufgabenstellung: OStR G. Ha.

F.9LK Abitur 1985 – Leistungskurs

1. Für jedes $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist durch $f_a(x) = \frac{3}{x^2+3x+a}$; $a \in \mathbb{D}_{f_a}$ eine Funktion f_a gegeben.
   a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_{f_a}$ von f_a. Für welche Werte von *a* hat f_a keine, eine, bzw. zwei Polstellen?
   b) Bestimmen Sie die Extremstellen von f_a. Für welches *a* hat der Graph G_{f_a} keine waagerechte Tangente?
   c) Geben Sie die Asymptote von f_a an.
   d) Zeichnen Sie die Graphen G_{f_0}, $G_{f_{\frac{9}{4}}}$ und G_{f_3} im Intervall [–5; 2] in ein Koordinatensystem (1 LE = 1 cm).
   e) Der Graph $G_{f_{\frac{9}{4}}}$, die Koordinatenachsen und die Gerade *x* = *z* (*z* > 0) umschließen eine Fläche *A*(*z*). Bestimmen Sie *z* so, daß diese Fläche den Inhalt 1 hat.
   f) Es sei $a > \frac{9}{4}$. Zeigen Sie, daß dann für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:

      $f_a(x) < \frac{3}{(x+1{,}5)^2}$.

      Im 1. Quadranten liegt für $a > \frac{9}{4}$ zwischen dem Graphen G_{f_a} und den Koordinatenachsen eine ins Unendliche reichende Fläche. Bestimmen Sie (für $a > \frac{9}{4}$) mit Hilfe der angegebenen Ungleichung eine obere Schranke für den Inhalt dieser Fläche.

2. Gegeben ist die Kugel *K*: $(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})^2 = 9$.

a) In welchen Punkten schneidet die Kugel K die Koordinatenachsen? Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene T_1 an K in $O(0|0|0)$. T_2 sei die zu T_1 parallele Tangentialebene an K, die nicht durch den Ursprung geht. Geben Sie eine Gleichung von T_2 an.

b) $P(1|4|-1)$ ist ein Punkt der Kugel K. Geben Sie eine Gleichung für die Tangentialebene an K in P an. Welchen Abstand hat der Ursprung von T_3? Stellen Sie eine Vektor-Gleichung für die Schnittgerade von T_3 mit der x_1x_3-Ebene auf.

c) Zeigen Sie, daß alle Geraden $g_{u,v}$, deren Gleichung von der Form $g_{u,v}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2u-2v \\ u \\ v \end{pmatrix}$ mit u, $v \in \mathbb{R}$ ist, in derselben Ebene E liegen, und daß diese Ebene Tangentialebene an K ist.

d) Wie sind u und v zu wählen, damit die Gerade $g_{u,v}$ Tangente an K ist?

3. Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ ist durch $f_a(x) = (x-a) \cdot e^{2-\frac{x}{a}}$; $x \in \mathbb{R}$ eine Funktion f_a gegeben.

   a) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte sowie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen G_{f_a}.

   b) Zeichnen Sie die Funktionsgraphen G_{f_1} und G_{f_2} im Intervall [0; 10] in ein Koordinatensystem (1 LE = 1 cm).

   c) Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Schargraphen:
      1) Alle Graphen schneiden die x-Achse unter dem gleichen Winkel. Berechnen Sie diesen Winkel.
      2) Alle Extrempunkte liegen auf einer Ursprungsgeraden. Bestimmen Sie deren Gleichung und zeichnen Sie sie in das vorhandene Koordinatensystem ein.
      3) Alle Wendetangenten verlaufen parallel.

   d) Die ins Unendliche reichende Fläche zwischen G_{f_a} und der x-Achse rechts von der Nullstelle von f_a hat einen endlichen Flächeninhalt. Berechnen Sie diesen.

Aufgabenstellung: OStR Dr. W. S.

F.9GK Abitur 1985 – Grundkurs

1. Ein „Stehaufmännchen“ bestehe aus einer Kugel mit aufgesetztem Kegel als Hut.
   a) Der Kegel soll die Kugel tangential berühren. Es entsteht ein Schnitt wie in Bild a, wenn man das Stehaufmännchen in waagerechte Lage kippt.

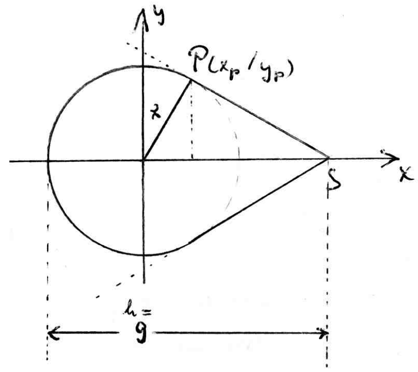
   

   Bild a

   Bestimme die Koordinaten des Punktes P, der ein Berührpunkt des Kegels mit der Kugel ist. Dabei sei der Radius der Kugel r = 4 cm. Die Gesamthöhe h des Stehaufmännchens beträgt 9 cm.
   b) Im Falle r = 3 cm, Gesamthöhe h = 9 cm hat der Punkt P die Koordinaten $(\frac{3}{2} \mid \frac{3}{2}\sqrt{3})$.

   Berechne das Volumen des Stehaufmännchens. Benutze hierzu die Theorie der Volumenberechnung von Rotationskörpern.
   c) Wenn der Kegelhut nicht notwendig tangential der Kugel aufsitzt, erhält man Schnitte wie in Bild c. Dabei ist das Stehaufmännchen wiederum in waagerechte Lage gekippt.

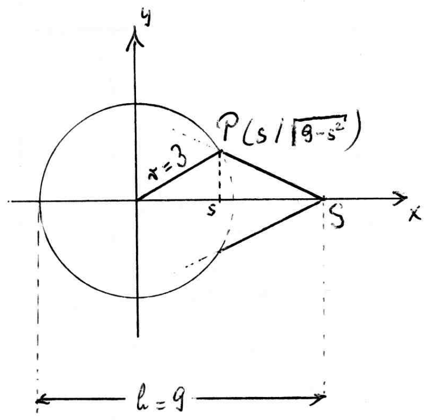
   

   Bild c

   i) Bestimme das Volumen $V(s)$ des zugehörigen Rotationskörpers in Abhängigkeit von der Abszisse s des Punktes P. Dabei sei der Radius der Kugel r = 3 cm und die Gesamthöhe h = 9 cm. (Formeln für Volumina von Kugelabschnitten und Kegeln dürfen benutzt werden!)
   ii) Für welches s erhält man ein „Stehaufmännchen“ maximalen Volumens?

   Interpretiere Dein Ergebnis unter den Angaben von Teil b) der Aufgabe.

   (Hilfe für c): Bestimme zunächst in Abhängigkeit von s getrennt voneinander das Kugelabschnittsvolumen $V_{Ku}(s)$ und das Kegelvolumen $V_{Ke}(s)$. $V_{Ke}(s)$ läßt sich, gegebenenfalls unter Verwendung von Polynomdivisionen, als ganzrationale Funktion 3. Grades (in s) schreiben!).
2. Gegeben seien die beiden Ebenen

$$\mathscr{E}_1\!:: \; w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathscr{E}_2\!:: \; w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Welchen Winkel schließen die beiden Ebenen ein?

b) Bestimme die Spur von $\mathscr{E}_1$ in der *x*-*y*-Ebene $\mathscr{E}_{xy}$.

c) i) Zeichne die Spurgerade (von $\mathscr{E}_1$ in $\mathscr{E}_{xy}$) in ein Koordinatenkreuz der Ebene.

ii) Bestime den Normaleneinheitsvektor zur Spurgeraden in der *x*-*y*-Ebene.

iii) Bestimme den Abstand der Geraden zum Koordinatenursprung; benutze hierzu die Mittel der Vektorrechnung.

iv) Berechne das Skalarprodukt des Ortsvektors eines beliebigen Geradenpunktes mit dem Normaleneinheitsvektor.

v) Wie müßte eine „Hessesche Normalform“ der Geraden in der *x*-*y*-Ebene laufen?

Aufgabenstellung: StR Dr. M. L.

F.10LK — Abitur 1986 – Leistungskurs

1. Gegeben ist die Funktion *f* durch $f(x) = 3x^2e^{-x}$.

a) Diskutieren Sie die Funktion, und zeichnen Sie ihren Graphen in [–1;7]!

b) Zeigen Sie: $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$!

c) Berechnen Sie den Inhalt der bis ins Unendliche reichenden Fläche, die der Graph von *f* mit der *x*-Achse einschließt!

d) Im Intervall [0; 2] soll der Graph von *f* durch den Graphen einer Funktion *g* approximiert werden. Dazu soll *g* eine ganzrationale Funktion dritten Grades sein, deren Graph ebenfalls den Tiefpunkt (0|0) besitzt, an der Stelle 2 einen Hochpunkt hat und an der Stelle 1 die Steigung $\frac{3}{e}$.

e) An welcher Stelle aus [0; 2] weichen die Funktionswerte von *f* und *g* mit $g(x) = \frac{1}{e}(-x^3 + 3x^2)$ am meisten von einander ab? Berechnen Sie diese Abweichung auf zwei Stellen nach dem Komma genau!

2. Gegeben sind die Vektoren $a_t = \begin{pmatrix} 2+2t \\ -2-t \\ -t^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\$ = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren a_t, b und $\$$ linear abhängig?

b) Zeigen Sie: Für die Vektoren a_{-2}, b, $\$$ gilt: $(a_{-2}\, b)\, \$ = a_{-2}\, (b\, \$)$!
Stellen Sie eine (notwendige und hinreichende) Bedingung für drei von 0 verschiedene Vektoren x, y, z eines beliebigen euklidischen Raumes auf, so daß gilt: (xy)z = x(yz)!

c) Stellen Sie eine Gleichung auf für die Ebene *e*, die durch die Punkte *A*, *B* und *C* mit a₋₂ = $\overrightarrow{OA}$, b = $\overrightarrow{OB}$ und $ = $\overrightarrow{OC}$ festgelegt ist!

d) Zeigen Sie, daß die Gerade *g*: x = $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ parallel zur Ebene *e* ist! Welchen Abstand haben *g* und *e*?

3. Gegeben sind eine Schar von Kugeln k_a durch (x – $\begin{pmatrix} 2a \\ a+3 \\ -2a \end{pmatrix}$)$^2 = 9a^2$ mit *a* > 0 und die Ebene *e*: $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$.

   a) Für welchen Wert von *a* geht die Kugel k_a durch den Ursprung? Für welchen Wert von *a* berührt die Kugel k_a die x_1-x_3-Ebene? Geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes an!

   b) Zeigen Sie: Alle Kugeln k_a berühren die Ebene *e* im selben Punkt *A*. Ermitteln Sie die Koordinaten des Berührpunktes *A*!

   c) Gibt es weitere gemeinsame Punkte aller Kugeln k_a?

   d) Für welche Werte von *t* sind die Geraden der Parallelenschar mit der Gleichung x = $\begin{pmatrix} t \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Tangenten an die Kugel k_1?

Aufgabenstellung: StR H. S.

F.10GK — Abitur 1986 – Grundkurs

1. a) Bestimmen Sie die Null-, Extrem- und Wendestellen der Funktion *f* mit $f(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x$ und zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall [–8; 8] (1 LE = 0,5 cm).

   b) Bestimmen Sie die Null- und Extremstellen der Funktion *g* mit $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$ und zeichnen Sie G_g in das vorhandene Koordinatensystem ein.

   c) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche *J*, die von den Graphen G_f und G_g eingeschlossen wird.

   d) Die Gerade mit der Gleichung $x = u \;\; (-8 < u < 0)$ schneidet G_f im Punkt *A* und G_g im Punkt *B*. Wie muß *u* gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Dreiecks *OAB* möglichst groß wird?

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die beiden Geraden

   g_1: $\overrightarrow{ox} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und g_2: $\overrightarrow{ox} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes *S* der Geraden g_1 und g_2 sowie ihren Schnittwinkel.

b) Gegeben sei die Ebene E: $\overrightarrow{ox} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Punkt-Normalenform sowie die zugehörige Koordinatengleichung.

c) Welchen Abstand hat der Punkt $P = p(-2|1|2)$ von der Ebene E?

d) Die Gerade g_3 durch den Punkt P mit dem Richtungsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ schneidet die Ebene E im Punkt R.
Berechnen Sie die Koordinaten von R.

e) Der Punkt $Q = p(-1|4|2)$ liegt auf der Geraden g_3 (Nachweis nicht erforderlich!). Berechnen Sie das Verhältnis, in dem der Punkt $R = p(-4|-5|2)$ die Strecke $\overline{PQ}$ teilt. Welcher der drei Punkte P, Q, R liegt also zwischen den anderen?

Aufgabenstellung: OStR Dr. W. S.

F.11LK — Abitur 1987 – Leistungskurs

1. Gegeben sei die Kurvenschar f_{ab} mit Parametern a, $b \in \mathbb{R}^+$, die durch folgende Vorschrift festgelegt ist: $f_{ab}(x) = \sqrt{b^2\,(1 - \frac{x^2}{a^2})}$.

   a) Für die Parameter sei die Einschränkung $b = \frac{1}{a}$ gemacht. Diskutiere die Teilschar f_a, $a \in \mathbb{R}^+$, die sich unter dieser Einschränkung aus der angegebenen Schar ergibt.
   Zeichne die Graphen zu f_1, f_2, $f_{\frac{1}{2}}$ (in ein Koordinatensystem).

   b) Es sei wieder die Einschränkung $b = \frac{1}{a}$ gemacht. Wie lautet die Volumenformel $V(a)$ des Rotationskörpers, der sich durch Rotation von f_a, $a \in \mathbb{R}^+$, um die x-Achse ergibt?

   c) Die Parameter a und b seien nun durch die Bedingung $a = \frac{1}{b} = e^{d^2}$ mit $d \in \mathbb{R}$ eingeschränkt. Die zugehörige Teilschar sei mit f_d, $d \in \mathbb{R}$, benannt. Das Volumen des Rotationskörpers, der sich durch Rotation von f_d um die x-Achse ergibt, berechnet sich dann nach der Formel

   $$V(d) = \frac{\pi}{e^{2d^2}} \int_{-e^{2d^2}}^{e^{d^2}} 1 - \frac{x^2}{e^{2d^2}}\,dx\,.$$

   Gibt es unter den Kurven f_d eine mit maximalem Volumen? Wenn ja, was zeichnet diese Kurve aus? (geometrische Interpretation)

d) Zu jedem Parameterpaar (a,b) mit $b \leq a$ seien die Punkte $P_{ab}(\sqrt{a^2 - b^2} \mid 0)$ und $P_{-ab}(-\sqrt{a^2 - b^2} \mid 0)$ gegeben. Bestimme den Funktionsterm $d(x)$, der sich aus der Summe der Abstände eines Kurvenpunktes P auf f_{ab} von den Punkten P_{ab} und P_{-ab} berechnet. Zeige, daß $d(x)$ den konstanten Wert „$2a$" für alle Punkte P des Graphen von f_{ab} ergibt. (Dies ist Anlaß zur „Gärtnerkonstruktion" einer Ellipse).

2. a) Bestimme von der Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Symmetrie- und Krümmungsverhalten. Fertige eine Skizze des Graphen mit den so gewonnenen Kenntnissen an (Einheiten 1 cm auf der x- und der y-Achse).

   b) i) Bestimme für eine gedachte Grenze $u \in \mathbb{R}^+$ die Fläche zwischen der x-Achse und der Kurve im Bereich $[0, u]$.

   ii) Existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_0^{\infty} xe^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$?

   iii) Welche Aussage kann man aus der Antwort zu ii) über das asymptotische Verhalten von f für $x \to \infty$ schließen?

3. a) Bestimme die Kugel k um $M(2|2|2)$, auf der der Ursprung des Koordinatensystems liegt.

   b) i) Gib die Tangentialebene $\mathcal{E}$ an k an, die folgenden Bedingungen genügt; benutze eine Normalenform.
   Auf ihr liegt der Punkt $P(1|1|10)$;
   der Berührpunkt B mit der Kugel hat ausschließlich positive Koordinaten;
   die Normale der Ebene ist komplanar zu Vektoren der Richtung der z-Achse und der 1. Winkelhalbierenden der xy-Ebene.

   ii) Welche Koordinaten hat der Berührpunkt?

   c) i) Wie heißt die Gleichung der Polarebene $\mathcal{P}$ bezüglich der Kugel k, die $P(1|1|10)$ zum Pol hat?
   Wie liegt $\mathcal{P}$ in bezug auf k (Gibt es einen nichtleeren Schnitt von $\mathcal{P}$ mit k)?

   ii) Welchen Schnitt hat $\mathcal{P}$ mit der Ebene

$$\mathcal{E}:: \ w = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen?

Aufgabenstellung: OStR Dr. M. L.

F.11GK1 Abitur 1987 – Grundkurs 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit dem Parameter $a > 0$:
   $f_a(x) = -x^3 + 3ax^2$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Bestimmen Sie für jedes $a > 0$ die Nullstellen, den Hoch-, Tief- und Wendepunkt des Graphen zu f_a. Geben Sie die Gleichung der Wendetangente an. Für welchen Wert von a geht diese durch den Punkt $A(0|-1)$?
   b) Zeichnen Sie den Graphen zu f_1 einschließlich der zugehörigen Wendetangente im Intervall $[-1,\ \frac{7}{2}]$, wobei 1 LE = 1 cm ist.
   c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_1, die vom Graphen zu f_1 und der Tangente in seinem Hochpunkt begrenzt wird. Schraffieren Sie diese Fläche in Ihrem Schaubild.
   Vergleichen Sie mit A_1 die Fläche $\overline{A}_1$, die vom Graphen zu f_1 und der x-Achse begrenzt wird.
   d) Verallgemeinern Sie die Aufgabenstellung von c), indem Sie statt des Graphen zu f_1 den Graphen zu f_a betrachten.
2. In einem cartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung 0 sind folgende Vektoren gegeben:
   $$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{OC} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{OD} = \vec{d} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
   a) Zeigen Sie, daß diese Vektoren lin. unabhängig sind.
   b) Die Punkte B, C, D legen eine Ebene E fest. Ihre Gleichung soll in einer Normalenform angegeben werden.
   c) Bestimmen Sie in der Ebene E einen vierten Eckpunkt A so, daß $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gilt. Geben Sie den Ortsvektor des Diagonalenschnittpunktes S von Viereck $ABCD$ an.
   d) Das Viereck $ABCD$ bildet mit dem Ursprung O als Spitze eine Pyramide. Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{OS}$.
   e) Berechnen Sie die Höhe (Lotlänge) der in d) angegebenen Pyramide. Der Höhenfußpunkt werde mit F bezeichnet. Welchen Winkel schließen $\overrightarrow{OS}$ und $\overrightarrow{OF}$ ein?

Aufgabenstellung: StD G. Hö.

F.11GK2 Abitur 1987 – Grundkurs 2

1. Gegeben sind die Funktionen f_a durch $f_a(x) = \frac{x^4}{a} - x^2 + \frac{a}{4}$; $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
   a) Untersuchen Sie die Funktionen f_a auf Symmetrie, Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graphen G_{f_2} im Intervall $[-2; +2]$ (1 LE = 2 cm).

b) Die Graphen G_{f_a} schließen im Intervall $[-\sqrt{\frac{a}{2}}; +\sqrt{\frac{a}{2}}]$ mit der x-Achse eine Fläche F_a ein. Diese liegt oberhalb der x-Achse. Für welches a beträgt deren Inhalt $\frac{8}{15}$? Zeichnen Sie diese Fläche.

c) In die Fläche F_2 soll ein Rechteck, dessen eine Seite auf der x-Achse liegt, mit größtmöglichem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Berechnen Sie seinen Inhalt.

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A = p(1|2|3)$, $B = p(4|4|3)$, $C = p(6|2|0)$ und $D = p(12|–7|10)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie eine Vektorgleichung der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C geht.

b) Zeigen Sie, daß der Punkt D nicht in der Ebene E liegt.

(E: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$).

c) Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte eines Vierflachs. Zeichnen Sie eine Skizze dieses Vielflachs. Zeigen Sie, daß die Mittelpunkte T, U, V, W der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$ und $\overline{AC}$ die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

d) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes D von der in b) gegebenen Ebene E.

Aufgabenstellung: OStR Dr. W. S.

F.12LK1 — Abitur 1988 – Leistungskurs 1

1. Gegeben sind die Funktionen f_a zu $f_a(x) = \frac{x}{(x^2+a)^2}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge von $f_a(x)$ an und untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Hoch- und Tiefpunkte sowie auf ihr Verhalten für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$. Führen Sie, falls nötig, Falluntersuchungen durch. Zeichnen Sie den Graphen von f_1 und f_{-1} im Intervall [–3; 3] in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. (Längeneinheit = 2 cm)

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der unendlichen Fläche zwischen der positiven x-Achse und dem Graphen von f_a für $a > 0$. Geben Sie den konkreten Wert für $a = 1$ an.

c) Welche Beziehung muß zwischen a_1 und a_2 gelten, damit die Graphen von f_{a_1} und f_{a_2} genau einen Punkt gemeinsam haben?

d) Bestimmen Sie den Wendepunkt von f_1 im ersten Quadranten. Welcher Graph aus f_a schneidet f_1 genau in diesem Wendepunkt?

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_{a,b}$ zu $f_{a,b}(x) = ax^2 \ln bx$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b \in \mathbb{R}^+$.

a) Diskutieren Sie die Funktion $f_{4,1}$ der Schar und zeichnen Sie den Graphen in]0; 2]. (Längeneinheiten = 4 cm auf der x- und 1 cm auf der y-Achse)

b) Welche Bedingungen müssen für a und b gelten, damit die Extrempunkte der Kurvenschar

1) auf der Geraden zu $g_1(x) = x$ oder

2) auf dem Graphen zu $g_2(x) = x^2$ liegen?

c) Zeigen Sie: $\int x^n \cdot \ln x \, dx = x^{n+1} \cdot \left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) + c$.

d) Das von $f_{a,b}$ und der x-Achse begrenzte Flächenstück soll berechnet werden. Für welche Wahl von a und b ist der Flächeninhalt 1?

3. Gegeben sind eine Kugelschar $K(a)$ und zwei Geraden g_1 und g_2:

$K(a)$: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = a^2$ mit $a > 0$; g_1: $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; g_2: $\vec{x} = v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, daß die Mittelpunkte der Kugeln $K(a)$ auf einer Geraden g in der x-y-Ebene liegen.

b) Zeigen Sie, daß die Geraden g_1 und g_2 Tangenten an jede Kugel $K(a)$ sind und ermitteln Sie die Berührpunkte B_1 und B_2.

c) Zeichnen Sie in der x-y-Ebene die Schnittkreise der Kugeln $K(3)$ und $K(4)$ mit den Geraden g_1 und g_2. Ermitteln Sie die Gleichung des Schnittkreises der Kugeln $K(3)$ und $K(4)$.

d) Zeigen Sie, daß verschiedene Schnittkreise in zueinander parallelen Ebenen liegen.

Aufgabenstellung: LiA B. W.

F.12LK2 — Abitur 1988 – Leistungskurs 2

1. Gegeben ist die Funktion f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \begin{cases} x + e^{1-x} & \text{für } -\infty < x \le 1 \\ 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} x & \text{für } 1 < x < \infty \end{cases}$

a) Untersuchen Sie, ob f über $\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist, bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Achsen, und zeichnen Sie den Graphen im Bereich $0 \le x \le 2$ (LE = 3 cm).

b) Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ ($0 < u \le 1$) schneidet den Graphen von f in P und die Gerade g mit der Gleichung $y = x$ in Q. Bestimmen Sie u so, daß der Flächeninhalt F des Dreiecks OQP (O ist der Ursprung des Koordinatensystems) möglichst groß wird. Kann für $u \in \,]1, \frac{4}{3}]$ noch ein größerer Flächeninhalt entstehen?

c) Eine Gerade l mit der Gleichung $y = mx$ schneidet den Graphen K der Funktion k: $[0, 2] \to [0, 2]$, $x \mapsto 2 \sin\frac{\pi}{2} \cdot x$ im Punkt S. K und l umschließen eine Fläche mit dem Inhalt A_1. K, l und die Gerade mit der

Gleichung $x = 2$ umschließen eine Fläche mit dem Inhalt A_2. Bestimmen Sie m so, daß A_1 gleich A_2 ist.

2. Im kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $P_1(2|0|0)$ und $P_2(3|0|-4)$ sowie eine Schar von Kugeln K_a durch $[\mathrm{x} - \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}]^2 = a^2$ $(a > 0)$ gegeben.
   a) Zeigen Sie, daß die x_1-Achse Tangente an jede Kugel der Kugelschar ist, und bestimmen Sie die Berührpunkte B_t. Auf welcher Kugel der Kugelschar liegt der Punkt P_2?
   b) K_{a_1} und K_{a_2} seien zwei sich schneidende Kugeln der Kugelschar mit $a_1 \neq a_2$. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene ihres Schnittkreises, und diskutieren Sie das Ergebnis.
   c) Es gilt der Satz: „Fällt man von jedem von 2 beliebigen Punkten auf die Polarebene des jeweils anderen Punktes das Lot, so verhalten sich die Längen der Lote wie die Abstände der Punkte vom Mittelpunkt der Kugel.“
   Verdeutlichen Sie den Satz am Beispiel der Punkte P_1 und P_2 sowie der Kugel K_1.
   d) Beweisen Sie den in c) angegebenen Satz.
   (Hinweis: Beziehen Sie sich beim Beweis auf eine Kugel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.)
3. Gegeben ist die Funktionenschar f_a: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_a(x) = \ln x \cdot (\ln x - 2a)$, $a \in \mathbb{R}$.
   a) Bestimmen Sie die Nullstellen, den Extrempunkt und die Asymptoten der Graphen der zugehörigen Graphenschar. Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Graphen. Skizzieren Sie für $a = 0$ den Graphen im Bereich $0 < x \leq 5$ (LE = 2 cm).
   b) Zeigen Sie, daß die Funktion f_0: $]0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\ln x)^2$ eine Umkehrfunktion g besitzt, und beweisen Sie, daß die Funktion G: $D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -2e^{-\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} + 1) + c$ Stammfunktion von g ist. Berechnen und deuten Sie $\lim\limits_{u \to 0} \int_u^1 f_0(x)\,dx$, $0 < u < 1$.
   c) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ ist durch F_a: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F_a(x) = \int_1^x f_a(t)\,dt$ eine Integralfunktion gegeben. Welche Aussagen können Sie über die lokalen Extrema von F_a machen?

Aufgabenstellung: OStR G. Ha.

F.12GK1 Abitur 1988 – Grundkurs 1

1. Gegeben ist die Funktion *f* mit dem Funktionsterm $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + x^2$.
   a) Untersuchen Sie diese Funktion auf Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von *f* im Intervall [–5; 5].
   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die von dem Funktionsgraphen und der Verbindungsgerade der beiden Hochpunkte des Funktionsgraphen von *f* eingeschlossen wird.
   c) Es sei *A(x|y)* ein beliebiger Parabelpunkt mit $0 < x < 4$ und $B(\frac{x}{2}|0)$ und $C(-\frac{x}{2}|0)$ zwei weitere Punkte. Für welches *x* hat das Dreieck *ABC* maximalen Flächeninhalt? Wie groß ist dieser Flächeninhalt?
2. Gegeben seien *A*(1|–2|1), *B*(3|–3|2), *C*(2|–4|2), *D*(2|1|–3), *E*(3|1|–5), *F*(1|2|3). E_1 sei die Ebene durch *A*, *B* und *C*, E_2 die Ebene durch *D*, *E*, und *F*.
   a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2 und die Abstände der Ebenen E_1 und E_2 vom Ursprung.
   b) Ein in der Ebene E_2 liegendes Quadrat von der Seitenlänge *DE* sei die Grundfläche einer quadratischen Pyramide mit der Spitze im Ursprung. Welches Volumen hat diese Pyramide?
   (Bemerkung: Das Volumen einer Pyramide läßt sich durch $V = \frac{1}{3}Gh$ berechnen, wobei *G* Flächeninhalt der Grundfläche, *h* die Höhe der Pyramide ist).
   c) E_3 sei eine Ebene, die auf der Gerade g_{BC} senkrecht steht und *A* enthält. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Ebene E_3 mit der Verbindungsgerade g_{DE}.

Aufgabenstellung: StR'in E. P.

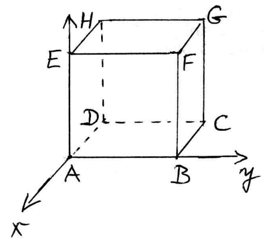
F.12GK2 Abitur 1988 – Grundkurs 2

1. Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit dem Parameter $a > 0$:
   $f_a(x) = -x^3 + 3ax^2$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Bestimmen Sie für jedes $a > 0$ die Nullstellen, den Hoch-, Tief- und Wendepunkt des Graphen G_{f_a}. Geben Sie auch die Gleichung der Wendetangente an. Für welchen Parameterwert *a* geht diese durch den Punkt *A*(0|–1)?
   b) Zeichnen Sie für $a = 1$ den Graphen G_{f_1} einschließlich der Wendetangente im Intervall [–1; 3,5], wobei 1 LE = 1 cm ist.
   c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_1, die von G_{f_1} und der Tangente in seinem Hochpunkt begrenzt wird. Schraffieren Sie dieser Fläche.

Vergleichen Sie mit A_1 die Fläche $\overline{A_1}$, die von G_{f_1} und der x-Achse begrenzt wird.

d) Erweitern Sie die Aufgabenstellung von c), indem Sie statt G_{f_1} den Graphen G_{f_a} betrachten.

2. Die nebenstehende Figur zeigt einen Würfel im rechtw. Koordinatensystem mit $A(0|0|0)$, $B(0|8|0)$, $D(-8|0|0)$, $E(0|0|8)$. Die durch E und C bestimmte Gerade g schneidet die durch A, F, H festgelegte Ebene E_1 im Punkt P_1 und die durch B, D, G festgelegte Ebene E_2 im Punkt P_2.



a) Wie liegen E_1 und E_2 zueinander? Berechnen Sie die Koordinaten von P_1 und P_2 und bestimmen Sie die Teilverhältnisse t_1 und t_2 ($\overrightarrow{EP_1} = t_1 \cdot \overrightarrow{EC}$ bzw. $\overrightarrow{EP_2} = t_2 \cdot \overrightarrow{EC}$).

b) E_3 sei die durch B, G, E festgelegte Ebene (Zeichnung). E_1 und E_3 schneiden sich in der Geraden h. Geben Sie die Gleichung von h an und beschreiben Sie die Lage von h (Zeichnung). Bestimmen Sie den Spurpunkt S_3 von h in der xy-Ebene.

c) Wie liegen die Geraden g und h zueinander?

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Spurgeraden k_1 von E_1 in der xy-Ebene und die Gleichung der Spurgeraden k_3 von E_3 in der xy-Ebene. Wie liegen k_1 und k_3 zueinander? Ist ihr Schnittpunkt bereits bekannt?

Aufgabenstellung: StD G. Hö.

F.13LK — Abitur 1989 – Leistungskurs

1. Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) = 4 - \dfrac{5}{e^{2x}+1}$.

a) Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch ($\mathbb{D}_f$, Null-, Extrem-, Wende-, Polstellen, Asymptoten) und zeigen Sie, daß der Graph von f punktsymmetrisch zum Punkt $W(0|1{,}5)$ ist.
Hinweis: Eine Funktion f ist genau dann symmetrisch zum Punkt $P(x_p|y_p)$, wenn für alle $x \in \mathbb{D}_f$ gilt: $f(x_p + x) - y_p = y_p - f(x_p - x)$.

b) Zeichnen Sie den Graphen von f sowie die Asymptoten im Intervall $[-2{,}5; 2{,}5]$ (1 LE = 2 cm).

c) Die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{1+x}{4-x}$ ist Umkehrfunktion der Funktion f.
Zeichnen Sie den Graphen von g in das vorhandene Schaubild. Was können Sie über die Symmetrie von g aussagen?

d) Wie groß ist der Inhalt der Fläche A, die der Graph von g mit den Koordinatenachsen im IV. Quadranten einschließt?

2. Gegeben seien folgende Vektoren des Raumes:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Die Geraden g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ und h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu\vec{v}$ sind windschief. Berechnen Sie den Abstand der Geraden mit Hilfe der Ihnen bekannten Formel.

b) Bestimmen Sie die Punkte $G \in g$ und $H \in h$ so, daß Abst(g,h) = $|\overrightarrow{GH}|$ ist.
Fertigen Sie dazu eine Skizze der Geraden g und h an, und stellen Sie mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eine Vektorgleichung für $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$ auf.

c) Geben Sie die Gleichung der Kugel k an, deren Durchmesser die Strecke $\overline{GH}$ ist.
Zwischenergebnis: $G(0|6|–3)$, $H(–4|4|1)$.

d) Die Ebene E werde bestimmt durch den Punkt $P(–1|1|3)$ und die Gerade f: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Welche zu E parallelen Ebenen berühren die Kugel k: $(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix})^2 = 9$?

3. Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{2x^2}$.

a) Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch ($\mathbb{D}_f$, Symmetrie, Null-, Extrem-, Wende-, Polstellen, Asymptoten).

b) Zeichnen Sie die Graphen von f und g mit $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$ im Intervall [–5; +5] in ein Koordinatensystem.

c) Zeigen Sie, daß die Funktion h mit $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3} & \text{für } |x| < 2 \\ f(x) & |x| \geq 2 \end{cases}$

eine für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige und differenzierbare Funktion ist. Zeichnen Sie den Graphen von h in das vorhandene Schaubild.

d) Die Graphen der Funktionen g und h sowie die Geraden $x = –2$ und $x = 2$ begrenzen eine Fläche. In diese Fläche soll symmetrisch zur y-Achse ein Rechteck $ABCD$ so einbeschrieben werden, daß A und B auf dem Graphen von h, C und D auf dem Graphen von g liegen. Dabei soll A im I. Quadranten sein.

Bestimmen Sie die Koordinaten von A so, daß das Rechteck $ABCD$ maximalen Umfang hat. Berechnen Sie diesen maximalen Umfang und zeichnen Sie das maximale Rechteck in Ihr Schaubild.

Aufgabenstellung: OStR Dr. W. S.

F.13GK1 Abitur 1989 – Grundkurs 1

1. Gegeben ist die Funktion f: $x \to f(x) = \frac{6}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte!
   Zeichnen Sie den Graphen im Bereich $-5 \le x \le 5$ (LE = 1 cm)!
   b) Welches von den zur y-Achse symmetrischen Dreiecken, die ihre Spitze im Ursprung und die beiden anderen Eckpunkte auf dem Graphen von f haben, hat den größten Flächeninhalt?
   c) Die Funktion f gehört zur Funktionenschar mit der Gleichung $f_a(x) = \frac{6a}{a^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$.
   In welcher Beziehung müssen a_1 und a_2 ($a_1 \ne a_2$) zueinander stehen, damit sich die zugehörigen Graphen in einem Punkt der Geraden $x = 1$ schneiden?
2. Im kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|t|t)$, $B(t|0|t)$, $C(t|-\frac{t}{2}|0)$ und $D(0|t|1-t)$ gegeben ($t \in \mathbb{R}^+$). O sei der Ursprung des Koordinatensystems.
   a) Berechnen Sie für t = 2 die Länge der Strecke $\overline{BC}$!
   b) Bestimmen Sie für t = 2 den Schnittpunkt S der Geraden OD mit der Ebene E_2, in der das Dreieck ABC liegt!
   c) Untersuchen Sie, für welchen t-Wert die Vektoren $\mathrm{b} = \overrightarrow{OB}$, $\$ = \overrightarrow{OC}$ und $\mathrm{d} = \overrightarrow{OD}$ linear abhängig sind!
   d) Zeigen Sie, daß die Ebenen E_t, die durch die Punkte A, B und C gehen, für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ parallel zueinander sind!
   Bestimmen Sie die Länge $e(t)$ des vom Punkt D auf die Ebene E_t gefällten Lotes, und diskutieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Lage des Punktes D zur Ebene!

Aufgabenstellung: StD G. Ha.

F.13GK2 Abitur 1989 – Grundkurs 2

1. Gegeben ist eine Schar von Funktionen durch $f_a(x) = \frac{2-a}{4}x^3 + ax$; $a \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f_a für $a = \frac{8}{3}$ auf Symmetrie, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, und zeichnen Sie ihren Graphen im Intervall [–4,5; 4,5]!

b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ haben die zugehörigen Funktionen genau eine Nullstelle? Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so daß f_a genau zwei Nullstellen hat (Begründung!)?

c) Untersuchen Sie die Graphen zweier verschiedener Funktionen f_{a_1} und f_{a_2} mit $a_1 \neq a_2$ auf gemeinsame Punkte!

d) Je zwei Graphen zweier verschiedener Funktionen f_{a_1} und f_{a_2} mit $a_1 \neq a_2$ schließen im Intervall [–2; 2] ein Flächenstück ein. Berechnen Sie seinen Inhalt!

2. Gegeben sind die linear unabhängigen Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \text{ und } \$ = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie den Vektor $d = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren a, b und \$ dar!

b) Das Viereck *ABCD* bildet mit dem Ursprung als Spitze eine Pyramide. Zeichnen Sie diese!

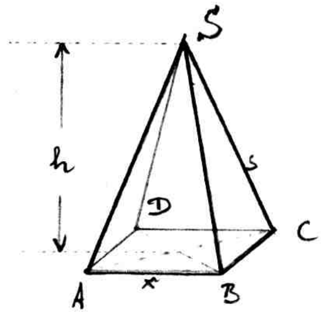
c) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes *S* im Viereck *ABCD*! In welchem Verhältnis teilen sich die Diagonalen?

d) Geben Sie eine Gleichung der Ebene *E* durch die Punkte *A*, *B* und *C* an, und zeigen Sie, daß $\overrightarrow{OS}$ mit $S(\frac{1}{4}|\frac{3}{2}|-\frac{5}{2})$ nicht senkrecht auf *E* steht!

e) Berechnen Sie die Koordinaten des Fußpunktes *L* des Lotes vom Ursprung auf die Ebene *E*!
(Hinweis: *L* liegt auf der Diagonalen $\overline{BD}$.)

Aufgabenstellung: StR H. S.

F.13GK3 Abitur 1989 – Grundkurs 3



1. Gegeben seien die Punkte
A(2,5|–1|1,5), *B*(2,5|3|–1,5), *C*(–2,5|3|–1,5) und *D*(–2,5|–1|1,5).

a) Zeige, daß die Punkte in einer Ebene liegen und ein Quadrat bilden.

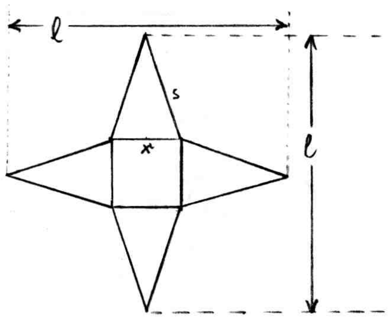
b) Gibt die Ebene, in der die Punkte liegen, in der Hesseschen Normalenform an. Wie groß ist der Abstand des Nullpunktes von der Ebene?

c) Durch den Punkt $S(0|4|4)$ und die angegebenen vier Punkte A, B, C, D entsteht eine quadratische Pyramide. Gib die Höhe dieser Pyramide an.

d) Zeige, daß die durch A, B, C, D und S entstehende Pyramide eine senkrechte Pyramide ist.

e) Welchen Winkel schließen die Ebenen ein, in denen zwei gegenüberliegende Seitenflächen der Pyramide enthalten sind?

2. Das Volumen V einer Pyramide berechnet man mit der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, wobei G den Flächeninhalt der Grundfläche und h das Maß der Höhe der Spitze S über der Grundfläche angibt.



a) Das Netz einer quadratischen, senkrechten Pyramide sei so durch das Maß l = 5 LE beschränkt, wie es in der Zeichnung angedeutet ist.

i) Zeige, daß unter dieser Nebenbedingung die Zielfunktion v zur Berechnung des Volumens der Pyramide in Abhängigkeit von der Kante x der Grundfläche den Funktionsterm $v(x) = \frac{1}{6} \cdot x^2 \cdot \sqrt{(5-x)^2 - x^2}$ hat.

ii) Forme den Term von v so um, daß die Wurzelbildung zur äußeren Funktion eine ganzrationale Funktion zur inneren Funktion wird.

b) Zeige mittels des Vorzeichenwechselkriteriums, daß die Funktion f mit dem Term $f(x) = \sqrt{-10 \cdot x^5 + 25 \cdot x^4}$ im Bereich]0; 2,5[ein Maximum besitzt. Gib den Wert dieses Maximums an.

c) Unter Ausnutzung der Kenntnisse aus a) und b): Welche Maße hat eine Pyramide mit der Nebenbedingung aus a), die ein möglichst großes Volumen hat? Gib Volumen V, Grundkante x, Seitenkante s und die Höhe h der Pyramide an.

Aufgabenstellung: OStR Dr. M. L.

F.14LK Abitur 1990 – Leistungskurs

1. Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ ist durch $f_a(x) = (x-a) \cdot e^{2-\frac{x}{a}}$, $x \in \mathbb{R}$ eine Funktion f_a gegeben.

a) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte sowie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen G_{f_a}.

b) Zeichnen Sie für a = 1 und a = 2 die Funktionsgraphen G_{f_1} und G_{f_2} in ein Koordinatensystem ein (Intervall [0; 10]).

c) Zeigen Sie, daß die Graphen von f_a folgende Eigenschaften haben:

1.) Alle Graphen schneiden die x-Achse unter dem gleichen Winkel. Berechnen Sie diesen Winkel.
2.) Alle Extrempunkte liegen auf einer Ursprungsgeraden. Bestimmen Sie deren Gleichung.
3.) Alle Wendetangenten verlaufen parallel. Unter welchem Winkel schneiden sie die x-Achse?

d) Die ins Unendliche reichende Fläche zwischen G_{f_a} und der x-Achse (rechts von der Nullstelle von f_a) hat einen endlichen Flächeninhalt. Berechnen Sie diesen.

2. Gegeben sind die senkrechten Projektionen einer Geraden g in die x_1x_3-Ebene: g_{13}: $x_1 - x_3 = 4$ bzw. g_{23}: $x_2 - 2x_3 = 3$.

a) Geben Sie eine Gleichung von g und eine Gleichung von g_{12} an, der senkrechten Projektion von g in die x_1x_2-Ebene. Wo durchstößt g die x_1x_2-Ebene?

b) Eine Gerade $\hat{g}$ sei durch die Gleichung $\hat{g}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

Berechnen Sie den Abstand der Geraden $\hat{g}$ von der x_1-Achse.

c) Berechnen Sie die Durchstoßpunkte D_{12} bzw. D_{23} der Geraden $\hat{g}$ aus Teilaufgabe b) durch die x_1x_2-Ebene bzw. x_2x_3-Ebene. Berechnen Sie den Winkel zwischen $\hat{g}$ und der x_1x_2-Ebene. Was läßt sich über g und $\hat{g}$ aussagen?

3. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $R(3|1|-1)$ und $Q(3|2|1)$ sowie die Ebene E: $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ und die Kugel k: $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{x} + 23 = 0$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r der Kugel k. Wie liegen R und Q in bezug auf E und k? Berechnen Sie die Länge der Sehne $\overline{RR^*}$, die k aus der Geraden RQ ausschneidet.

b) Zeigen Sie, daß E die Kugel k schneidet. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M_1 und den Radius r_1 des Schnittkreises k_1.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene T, die die Kugel k in R berührt.
Alle zu T parallelen Ebenen, welche die Kugel k schneiden oder berühren, bilden eine Ebenenschar T_a. Bestimmen Sie diejenigen Ebenen (durch Angabe des entspr. Parameters a) der Schar T_a, die aus der Kugel k Kreise mit dem Radius $r_2 = 3$ ausschneiden.

Aufgabenstellung: StD G. Hö.

F.14GK1 Abitur 1990 – Grundkurs 1

1. Die Funktionenschar mit den Termen $f_d(x) = x^4 - 2x^2 + d$, $d \in \mathbb{R}$ soll untersucht werden:
   a) Fertigen Sie eine Kurvendiskussion für f_1 (also d = 1) an. Zeichnen Sie den Graphen im Bereich [–2; 2]. (*)
   b) Welche Bedeutung hat der Parameter „*d*" für die Graphen der Funktionen f_d? Erläutern Sie die Bedeutung kurz und zeichnen Sie die Graphen für d = 0 und d = 0,5 in das Schaubild (Aufg.teil a)) ein.
   c) Bestimmen Sie den Parameterwert d, d. h. die Funktion aus der Schar, für den folgendes Integral den Wert 0 annimmt: $\int_{-1}^{1} f_d(x)\,dx = 0$.
   d) Geben Sie die Gleichungen der Wendetangenten von f_d an.
   e) Für d = 1: Bestimmen Sie eine Parabel (2. Grades), die die Kurve von f_1 in den Wendepunkten von f_1 berührt, dort also insbesondere die gleichen Steigungen wie f_1 hat.

   * Zur Erinnerung: Eine Kurvendiskussion umfaßt die Bestimmung folgender Punkte: Linearfaktorzerlegung und Definitionsmenge, Lückenbetrachtung, asymptotisches Verhalten, Symmetrie, *y*-Achsenabschnitt, Nullstellen, Steigungsverhalten und Extrempunkte, Krümmungsverhalten und Wendepunkte, gegebenenfalls unterstützende Wertetabelle, Graph der Funktion.
2. Gegeben seien die beiden Ebenen

$$E_1\text{::}\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1\frac{1}{3} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_2\text{::}\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) Geben Sie die Ebenen in der Hesseschen Normalenform an. Welchen Winkel schließen die beiden Ebenen ein?
   b) i) Bestimmen Sie die Spur von E_1 in der *xy*-Ebene E_{xy}.
      ii) Zeichnen Sie die Spurgerade von E_1 in E_{xy} in ein Koordinatenkreuz ein.
   c) i) Zeichnen Sie die Gerade g mit dem Term $g(x) = -x + 1\frac{1}{3}$ in die *xy*-Ebene ein.
      ii) Bestimmen Sie einen Normaleneinheitsvektor zur Spurgerade, der in der *xy*-Ebene liegt.
      iii) Bestimmen Sie den Abstand der Spurgeraden zum Koordinatenursprung. Benutzen Sie hierzu die Mittel der Vektorrechnung.
      iv) Berechnen Sie das Skalarprodukt des Ortsvektors eines beliebigen Punktes der Spurgeraden mit dem Normaleneinheitsvektor.
      v) Wie müßte eine „Hessesche Normalenform" der Geraden in der *xy*-Ebene lauten?

Aufgabenstellung: OStR Dr. M. L.

F.14GK2 Abitur 1990 – Grundkurs 2

1. Gegeben ist die Funktionenschar f_a zu $f_a(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{ax^2}{4}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   a) Untersuchen Sie den Graphen von f_1 auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte!
   Zeichnen Sie den Graphen von f_1 im Intervall [–4; 4] (Längeneinheit 1 cm)!
   b) Welches von den zur y-Achse symmetrischen Dreiecken, die ihre Spitze im Ursprung und die beiden anderen Eckpunkte auf dem Graphen von f_1 haben, hat den kleinsten Flächeninhalt?
   c) Untersuchen Sie die Graphen von f_a auf Schnittpunkte mit der x-Achse und Extrempunkte und zeigen Sie, daß die Graphen genau dann Tiefpunkte haben, wenn sie keine Schnittpunkte mit der x-Achse haben! Finden Sie zwei Zahlen s und t, so daß die Extrempunkte von f_s und die gemeinsamen Punkte von f_t mit der x-Achse die Ecken eines Quadrates bilden!
2. Gegeben sind die Ebene E und eine Schar von Ebenen E_k:
   E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$; E_k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}k+16\\6\\0\end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}$.
   a) Zeigen Sie, daß die Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind! Was folgt daraus für den Schnitt von E mit einer Ebene der Schar E_k?
   b) Für welchen Wert von k erhält man die Ebene
   $6x_1 - 23x_2 - 14x_3 + 104 = 0$?
   c) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und E_7. Zeigen Sie, daß die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}23\\6\\0\end{pmatrix}$ in der Ebene E_7 liegt und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden s und g.
   d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(2a|3a|7)$ von der Ebene E und diskutieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Lage des Punktes P zur Ebene!

Aufgabenstellung: LiA B. W.

F.14GK3 Abitur 1990 – Grundkurs 3

1. Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) = -x^4 + 4x^2$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Untersuchen Sie f auf Symmetrie, und bestimmen Sie die Null-, Extrem- und Wendestellen von f.
b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall [–2; 2] (1 LE = 1 cm).
c) Welchen Inhalt hat die Fläche A, die f mit der x-Achse einschließt? (Nullstellen von f: –2, 0, 2).
d) Ein zur y-Achse symmetrisches Dreieck SPQ hat seine Spitze in $S(0|4)$, und die beiden anderen Ecken P und Q liegen auf dem Kurvenbogen von f zwischen den Hochpunkten $H_1(-\sqrt{2}\,|\,4)$ und $H_2(\sqrt{2}\,|\,4)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P und Q so, daß der Inhalt des Dreiecks SPQ maximal wird.

[Quelle: Baden-Württemberg 1980]

2. Gegeben sei die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

und die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes T der Geraden g und der Ebene E.
b) Die Punkte $P(2|8|–6)$, $Q(0|7|–4)$, $R(2|5|–3)$ und $S(4|6|–5)$ liegen in der Ebene E (Nachweis nicht erforderlich). Zeigen Sie, daß das Viereck $PQRS$ ein Quadrat ist, und bestimmen Sie seinen Mittelpunkt M. Was stellen Sie fest?
c) Es sei h die Senkrechte zur Ebene E, die durch den Punkt $M(2|6{,}5|–4{,}5)$ geht. Bestimmen Sie diejenigen Punkte A und A' auf h, die symmetrisch zu E liegen und die von $P(2|8|–6)$ jeweils 3 Einheiten entfernt sind.

[Quelle: Baden-Württemberg 1984]

Aufgabenstellung: OStR Dr. W. S.

F.15LK Abitur 1991 – Leistungskurse 1 und 2 (gleiche Aufgaben)

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \frac{x}{k} \cdot \sqrt{k^2 - x^2}$; $k \in \mathbb{R}^+$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D(f_k)$.
b) Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf Symmetrie.
c) Bestimmen Sie Nullpunkte und Extrempunkte von $G(f_k)$ in Abhängigkeit von k.
d) Zeichnen Sie den Graphen $G(f_{12})$ anhand der errechneten Null- und Extrempunkte und einer ergänzenden Wertetabelle. (1 cm ≙ 1 Einheit)

e) Für welches k hat die Tangente an den Graphen im Ursprung die Steigung 1?
f) Die Extrempunkte aller Graphen von $G(f_k)$ liegen auf einer Kurve $G(g)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Kurve.
g) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Funktionsgraph um die x-Achse rotiert.

2. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion im Hinblick auf Symmetrie, Definitionsbereich und Art der Definitionslücken und bestimmen Sie die Nullpunkte des Funktionsgraphen.
b) Berechnen Sie Extrem- und Sattelpunkte des Funktionsgraphen mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums.
c) Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptoten des Funktionsgraphen.
d) Tragen Sie Null-, Extrem- und Sattelpunkte sowie die Asymptoten in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Funktionsgraphen.
e) Der Graph $G(f)$ hat einen Hochpunkt H bei $x = -\sqrt{12}$, einen Tiefpunkt T bei $x = \sqrt{12}$ und einen Wendepunkt W bei $x = 0$. Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen ganzrationalen Funktion 3. Grades $y = g(x)$, die in T einen Hochpunkt, in H einen Tiefpunkt und in W ebenfalls einen Wendepunkt hat. Skizzieren Sie den Graphen $G(g)$ in das vorhandene Koordinatensystem.
f) Berechnen Sie den Flächeninhalt, den der Graph der Funktion g mit $g(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{4}x$ mit der Asymptoten, die die Gleichung von $y = x$ hat, einschließt.

3. In einem kartesischen Koordinatensystem sind eine Ebenenschar
E_t: $(t-4)x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 2t$, $t \in \mathbb{R}$
und eine Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Für welchen Wert von t ist E_t parallel zu g?
b) Die Ebene E^* verläuft durch den Punkt $P(2|1|11)$ und ist parallel zu E_7. Ermitteln Sie eine Normalengleichung von E^* und zeigen Sie, daß der Abstand von E_7 und E^* 8 beträgt.
c) Die Kugel K mit dem Radius $r = 5$ hat ihren Mittelpunkt auf der Geraden g und wird von den Ebenen E_7 und E^* in kongruenten Kreisen geschnitten. Bestimmen Sie eine Gleichung von K.
d) Die Ebenen T_1 und T_2 sind senkrecht zur x_2-Achse und berühren die Kugel K: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}\right)^2 = 25$.

Ermitteln Sie die Gleichungen von T_1 und T_2.

e) Es gibt genau eine Ebene aus der Ebenenschar E_t, die auf keiner anderen Ebene der Schar senkrecht steht. Wie heißt ihre Gleichung?

Aufgabenstellung: StR'in E. P. und StR z. A. G. W.

F.15GK1 Abitur 1991 – Grundkurs 1

1. Gegeben ist die Funktion f: $x \to f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrempunkte und Wendepunkte! Zeichnen Sie den Graphen im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ (LE = 1 cm)!

   b) Betrachten Sie für $x > 1$ einen Graphenpunkt P! Fällen Sie von P aus das Lot auf die x-Achse, und nennen Sie den Lotfußpunkt F! Die Punkte P und F sowie der Punkt $N(1|0)$ sind die Eckpunkte eines Rechtecks. Welche Koordinaten muß der Punkt P haben, damit das Rechteck einen maximalen Flächeninhalt hat?

   c) Der Graph von f schließt mit der x-Achse und der Geraden $x = u$ ($u > 1$) eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt $A(u)$ dieser Fläche, und ermitteln Sie $\lim\limits_{u \to \infty} A(u)$!

   d) Die Funktion f gehört zur Funktionenschar f_t mit der Gleichung $f_t(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{4t}{x^3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Zu jedem $t \in \mathbb{R}^+$ gibt es eine zur y-Achse symmetrische Parabel 2. Grades mit dem Funktionsterm $g_t(x)$, die den Graphen von f_t auf der x-Achse senkrecht schneidet. Welche Gleichung hat diese Parabelschar?

2. Im kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2|1|2)$, $B(4|-2|4)$ und $C(0|-3|4)$ gegeben. O sei der Ursprung des Koordinatensystems.

   a) Berechnen Sie den Winkel ε ($0° < \varepsilon < 90°$), den die Geraden OA und OB miteinander bilden!

   b) Die Kugel um O, die durch den Punkt B geht, schneidet aus der Geraden BC eine Strecke aus. Wie lang ist diese Strecke?

   c) Bestimmen Sie im Dreieck ABC den zur Höhe h_b gehörenden Höhenfußpunkt F und seine Lage auf der Geraden AC! Intrepretieren Sie das Ergebnis!

   d) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ wird durch $P(52|a|a^2)$ ein Punkt in R^3 gegeben. Wie muß a gewählt werden, damit die Punkte O und P auf derselben Seite der durch A, B und C gehenden Ebene E liegen und der Abstand des Punktes P von E doppelt so groß wie der des Punktes O von E ist?

Aufgabenstellung: StD G. Ha.

F.15GK2 Abitur 1991 – Grundkurs 2

1. Gegeben ist eine Schar von Parabeln 3. Ordnung, die zum Koordinatenursprung *O* punktsymmetrisch sind und den Graphen der Funktion *g* mit $g(x) = \frac{4}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ berühren.

   a) Ermitteln Sie die Funktion *f**, deren Graph G_{f^*} den Graphen G_g im Punkt *B(*2|2) berührt. Bestimmen Sie die Nullstellen und Extremstellen von *f**. Zeichnen Sie die Graphen G_{f^*} und G_g im Intervall [–4; 4].

   b) Eine Funktion *h* ist über dem Intervall [0; 4] definiert:

   $$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^3 + 2x & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ \frac{4}{x} & \text{für } 2 < x \le 4 \end{cases}.$$

   P(u|h(u)) sei ein Punkt des Graphen G_h. Die Geraden *OP*, die Parallele zur *y*-Achse durch *P* und die *x*-Achse bilden ein Dreieck. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt *A*(*u*) für $0 \le u \le 4$. Für welche *u* ist dieser Flächeninhalt am größten? Zeichnen Sie den Graphen zu $u \to A(u)$!

   c) Die Parabeln der oben genannten Schar sind Graphen von Funktionen *f*, die sich in der Form $f(x) = -ax^3 + bx$ mit *a*, $b \in \mathbb{R}$ darstellen lassen. Die Bedingung, daß die Graphen G_f den Graphen G_g berühren sollen, erzwingt eine Bedingung zwischen den Parametern *a* und *b*. Wie lautet sie? (Ergebnis: $b^2 = 16a$)
   Stellen Sie die Funktionen der Schar mit Hilfe des Paramteres *b* dar. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die ein Graph zu f_b mir der *x*-Achse im 1. Quadranten einschließt! Interpretieren Sie das Resultat!

2. Im kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenenschar E_t: $\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 2t$

   mit $t \in \mathbb{R}$ und die Punkte *P(*5|7|1) und *Q(*7|12|–2) gegeben.

   a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt *S* der Geraden *PQ* und der Ebene E_2 (für *t* = 2).

   b) Berechnen Sie die Schnittgerade *g* der Ebenen E_0 und E_1! Welche Lage hat die Gerade *g* zu den anderen Ebenen der Ebenenschar E_t?

   Liegt *g* auch in der Ebene *E**: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 2$?

   Gehört *E** zur Ebenenschar E_t?

   c) Zeigen Sie, daß unter der Bedingung $t_2 = -\frac{2}{t_1}$, wo $t_1 \ne 0$ ist, die zugehörigen Scharebenen E_{t_1} und E_{t_2} aufeinander senkrecht stehen!

   Bestimmen Sie diejenigen aufeinander senkrecht stehenden Ebenen der Schar E_t, die Tangentialebenen an eine Kugel um den Koordinatenursprung sind!

Aufgabenstellung: StD G. Hö.

F.16LK Abitur 1992 – Leistungskurs

1. Einer Halbkugel sei eine hyperbolische Haube aufgesetzt, so daß eine Art Stehaufmännchen entsteht, dessen Gesamthöhe 9 cm sei. Ist der Radius der Halbkugel r, so hat die Haube die Höhe $9-r$. Die Körper werden dann als Rotationskörper aus folgenden Funktionen erzeugt:

$$0<r<9\,,\; f_r(x)=\begin{cases} 0 & \text{für } -\infty<x<-r \\ \sqrt{r\cdot r-x\cdot x} & \text{für } -r\le x<0 \\ \frac{10-r}{9-r}\cdot\left(\frac{r}{x+1}-\frac{r}{10-r}\right) & \text{für } 0\le x\le 9-r \\ 0 & \text{für } 9-r<x<\infty \end{cases}$$

   a) Begründe, warum die Funktionen stetig sind.
   b) Skizziere den Graphen der Funktion f_5 und einen Schnitt durch den zugehörigen Rotationskörper.
   (Hierbei ist nicht an eine ausführliche Kurvendiskussion gedacht; es reicht vielmehr z. B. die Erwähnung der Kenntnis über die Graphen der Teilfunktionen in den Bereichen $-r\le x<0$ und $0\le x\le 9-r$ zur Begründung aus.)
   c) Bestimme das Volumen des zu f_5 gehörigen Rotationskörpers

   Wenn man statt hyperbolischen Hauben der Halbkugel Kegel aufsetzt, erhält man im Bereich $0\le x\le 9-r$ jeweils andere Teilfunktionen:

   d) Gib zu diesen Körpern (Halbkugel mit Kegelhaube) entsprechend die erzeugende Funktionenschar g_r, $0<r<9$ an. Wie groß ist das Volumen $V(r)$ dieser Rotationskörper?
   e) Fertige eine Kurvendiskussion[1] der Funktion V mit $V(r)$, $r\in\mathbb{R}$ an:
   $V(r)=\frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot(r+9)$.
   f) Wie müssen die Maße des Körpers (aus d), Halbkugel mit Kegel) sein, damit der Körper ein maximales Volumen hat?

2. a) Zeige, daß die n-te Ableitung $f_t^{(n)}$ der Funktion f_t mit $f_t(x)=tx\cdot e^{tx}$, $x, t\in\mathbb{R}$, durch folgende Vorschrift $f_t^{(n)}(x)=t^n\cdot e^{tx}\cdot(tx+n)$, $x, t\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ gegeben ist!
   b) Zeige, daß die Funktionen f_t
      i) relative Tiefpunkte auf gleicher Höhe (Ordinate),
      ii) Wendepunkte auf gleicher Höhe (Ordinate)
   für alle $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ haben. Berechne diese Punkte!
   c) Zeichne die Graphen der Funktionen f_{-1} und f_1 in ein Schaubild! (Einheiten x-Achse 1 cm, y-Achse 3 cm)

[1] Zur Erinnerung: Kurvendiskussionen umfassen Untersuchungen zum Definitionsbereich, asymptotischen Verhalten, Symmetrie, y-Achsenabschnitt, Nullstellen, Steigungsverhalten und Extrema, Krümmungsverhalten und Wendestellen.

Überlege hierzu noch, wo die Nullstellen der Funktionen liegen, und wie ihr Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ ist.

3. Löse mit Mitteln der Vektorgeometrie folgende Beobachtungen an Dreiecken (a und b):
   a) Gegeben sei das Dreieck *ABC* mit den Punkten $A(0|0)$, $B(5|0)$, $C(3{,}2|2{,}4)$.
      i) Bestimme den Umkreis des Dreiecks (Mittelpunkt *M*, Radius *r*).
      ii) Bestimme den Schwerpunkt *S* des Dreiecks. (Schnittpunkt der Seitenhalbierenden)
      iii) Bestimme den Schnittpunkt *H* der Höhen des Dreiecks.
      iv) Zeige, daß diese drei Punkte *M*, *S* und *H* auf einer Geraden liegen.
      Man nennt diese Gerade (iv) die Eulersche Gerade.
   b) Beweise ganz allgemein:
      Im Dreieck liegen Schwerpunkt *S*, Umkreismittelpunkt *M* und Höhenschnittpunkt *H* auf einer Geraden *e*. Dabei stehen die Teilstreckenlängen *MS* und *SH* im Verhältnis 1 : 2.
      (Hilfe: Lege das Koordinatensystem (gedanklich) so, daß eine Seite des Dreiecks auf der *x*-Achse und zusätzlich ein Eckpunkt im Ursprung liegt; siehe entsprechende Lage von *ABC* in Teil a).)
   c) Beweise: Wenn in einem Dreieck die Eulersche Gerade durch eine Ecke verläuft, so ist das Dreieck rechtwinklig oder gleichschenklig.
      (Hilfe: Nutze Teil b), Kenntnisse aus der Geometrie über die speziellen Linien im Dreieck und überlege, was über das Dreieck ausgesagt werden kann, wenn es nicht gleichschenklig ist.)

Aufgabenstellung: OStR Dr. M. L.

F.16GK1 Abitur 1992 – Grundkurs 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar f_t für $t \in \mathbb{R}^+$ mit $f_t(x) = x^3 - 3tx^2 + 2t^2x$ mit $x \in \mathbb{R}$.
   a) Für $t = 2$ soll der Graph der Funktion f_2 gezeichnet werden. Die Tangenten im Koordinatenursprung *O* und im Wendepunkt *W* schneiden sich in *S*. Berechnen Sie den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks *OWS*.
      Berechnen Sie auch den Flächeninhalt A_2 der Fläche, die der Graph zu f_2 mit der *x*-Achse im 1. Quadranten einschließt. Bestimmen Sie das Verhältnis $A_2 : A_1$.
   b) Verallgemeinern Sie die Berechnungen von Teil a) dieser Aufgabe! An den Graphen zu f_t (mit $t \in \mathbb{R}^+$) werden in *O* und im Wendepunkt *W* die Tangenten gezeichnet. $A_1(t)$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks *OWS*, $A_2(t)$ der Inhalt des Flächenstücks, das der Graph zu f_t und die *x*-Achse im 1. Quadranten des Koordinatensystems einschließen.

Zeigen Sie: Das Verhältnis $A_2(t) : A_1(t)$ hat für alle Graphen denselben Wert.

c) Vom Ursprung aus läßt sich an den Graphen zu f_t eine Tangente mit dem Berührpunkt P_t im 4. Quadranten legen. Geben Sie die Koordinaten von P_t und die Steigung der Tangente an!

2. Gegeben sind die Punkte $A(0|3|2)$, $B(2|0|2)$ und $C_t\,(2|3|t)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

   a) Die Ebene E enthält die Punkte A, B und C_0. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E. Welchen Abstand hat der Koordinatenursprung von E?

   b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 der Koordinatenachsen mit E und fertigen Sie eine Zeichnung an, in der auch A, B und C_0 eingetragen sind. Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, auf der alle Punkte C_t liegen.
   Für welches t ist das Dreieck ABC_t rechtwinklig? Zeichnen Sie dieses Dreieck und die Gerade g in das Koordinatensystem ein!

   c) Bestimmen Sie das Volumen V der Pyramide mit den Ecken S_1, S_2, S_3 und O.
   Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $S_1S_2S_3$!

Aufgabenstellung: StD G. Hö.

F.16GK2 — Abitur 1992 – Grundkurs 2

1. Für jedes $a > 0$ ist durch $f_a(x) = 8 \cdot \frac{x-a}{x^2};\; x \neq 0$ eine Funktion gegeben.
   Außerdem sei $f_0(x) = \frac{8}{x};\; x \neq 0$.

   a) Zeigen Sie: $f_a(x) = \frac{8}{x} - \frac{8a}{x^2}$, und bestimmen Sie die Null-, Extrem- und Wendestellen von f_a.

   b) Zeichnen Sie die Graphen von f_0 und f_1 im Intervall (0; 8] in ein Koordinatensystem (1 LE = 2 cm, negativer Teil der y-Achse ist unwesentlich!)

   c) Für $a > 0$ bilden im I. Quadranten die Koordinatenachsen sowie deren Parallelen durch den Hochpunkt $H_a(2a\,|\,\frac{2}{a})$ von f_a ein Rechteck. Für welches a wird dessen Umfang minimal? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

   d) Die Geraden $x = 2$ und $x = 8$ sowie die Graphen von f_0 und f_1 umschließen im I. Quadranten eine Fläche A. Berechnen Sie den Inhalt von A.

2. Gegeben sei die Ebene E: $3x - 2y + 6z = 14$ und die Gerade

   g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Die Ebene E_2 gehe durch den Punkt $P(2|1|11)$ und sei parallel zu E_1. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von E_2, und berechnen Sie den Abstand der Ebenen E_1 und E_2.

b) Berechnen Sie eine Gleichung der Ebene E_m, die parallel zu E_1 und E_2 ist, und die von beiden Ebenen den gleichen Abstand hat.
Hinweis: Ist $A \in E_1$ und $B \in E_2$, so liegt der Mittelpunkt der Strecke AB auf E_m.
Berechnen Sie den Schnittpunkt S von g und E_m
(E_m: $3x - 2y + 6z = 42$).

c) Die Kugel mit dem Mittelpunkt $S(0|-3|6)$ und dem Radius 5 schneidet die Ebenen E_1 und E_2 in zwei kongruenten Kreisen. Bestimmen Sie deren Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie ihre Radien. Fertigen Sie eine Skizze an. Hinweis: Abst$(E_1;E_2)$ = 8.

d) Bestimmen Sie eine Vektorgleichung der Ebene E^*, die E_1 senkrecht schneidet und die Gerade g enthält. Berechnen Sie die Gleichung der Schnittgeraden g' von E_1 und E^*. Interpretieren Sie den Verlauf von g'.

Aufgabenstellung: OStR Dr. W. S.

F.16GK3 — Abitur 1992 – Grundkurs 3

1. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + 2x^2$.
   a) Untersuchen Sie diese Funktion auf Symmetrie und Nullstellen!
   b) Bestimmen Sie die Extrempunkte dieser Funktion!
   c) Bestimmen Sie die Wendepunkte dieser Funktion!
   d) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f im Intervall [–4; 4]!
   e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der Geraden durch die beiden Hochpunkte ($HP_1(-\sqrt{8}\,|\,8)$ und $HP_2(+\sqrt{8}\,|\,8)$) von f eingeschlossen wird!
   f) Es sei $P(x|y)$ ein beliebiger Punkt des Graphen von f mit $0 < x < 4$. $Q(\frac{x}{2}\,|\,0)$ und $R(-\frac{x}{2}\,|\,0)$ bilden mit P ein Dreieck.
   Für welches x hat das Dreieck ΔPQR maximalen Flächeninhalt und wie groß ist dieser maximale Flächeninhalt?

2. Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}_t$ durch folgende Komponenten bezüglich der Standardbasis gegeben:
   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{b}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$
   a) Zeigen Sie, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}_0$ linear unabhängig sind! Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$, der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}_0$ orthogonal ist.

b) Für welches t sind $\vec{a}$ und $\vec{b}_t$ kollinear? Zeigen Sie, daß $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}_t$ für kein $t \neq 0{,}5$ komplanar sind.

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}_0$! Für welche t beträgt der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}_t$ 60°? Existiert ein t, für das $\vec{a}$ und $\vec{b}_t$ einen Winkel von 180° bilden?

d) Zeigen Sie, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}_t$ für kein t orthogonal sind! Für welches k sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{a} + k\vec{b}_t$ orthogonal? Gibt es ein t_0, so daß $\vec{b}_{t_0}$ zu keinem $\vec{b}_t$ orthogonal ist?

Aufgabenstellung: StR z. A. G. W.

F.17LK — Abitur 1993 – Leistungskurs

1. Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 3x^2e^{-x}$.

   a) Untersuchen Sie die Funktion auf ihre Definitionsmenge, Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte sowie das Verhalten für $x \to \pm\infty$, und zeichnen Sie ihren Graphen in [–1; 7]!

   b) Zeigen Sie: $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$!

   c) Berechnen Sie den Inhalt der bis ins Unendliche reichenden Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt!

   d) Im Intervall [0; 2] soll der Graph von f durch den Graphen einer Funktion g approximiert werden. Dazu soll g eine ganzrationale Funktion dritten Grades sein, deren Graph ebenfalls den Tiefpunkt (0|0) besitzt, an der Stelle 2 einen Hochpunkt hat und an der Stelle 1 die Steigung $\frac{3}{e}$.

   e) An welcher Stelle aus [0; 2] weichen die Funktionswerte von f und g mit $g(x) = \frac{1}{e}(-x^3 + 3x^2)$ am meisten von einander ab? Berechnen Sie diese Abweichung auf zwei Stellen nach dem Komma genau!

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_t = \begin{pmatrix} 2+2t \\ -2-t \\ -t^2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{a}_t$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig?

   b) Zeigen Sie: Für die Vektoren $\vec{a}_{-2}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ gilt: $(\vec{a}_{-2}\,\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}_{-2}(\vec{b}\,\vec{c})$!
   Stellen Sie eine (notwendige und hinreichende) Bedingung für drei von $\vec{0}$ verschiedene Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ eines beliebigen Vektorraumes auf, so daß gilt: $(\vec{x}\,\vec{y})\,\vec{z} = \vec{x}\,(\vec{y}\,\vec{z})$!

c) Stellen Sie eine Gleichung auf für die Ebene *E*, die durch die Punkte *A*, *B* und *C* mit $\vec{a}_{-2} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ festgelegt ist!

d) Zeigen Sie, daß die Gerade *g*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ parallel zur Ebene *E* ist! Welchen Abstand haben *g* und *E*?

3. Gegeben sei eine Schar von Kugeln k_a durch $(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2a \\ a+3 \\ -2a \end{pmatrix})^2 = 9a^2$ mit $a > 0$ und die Ebene *E*: $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$.

a) Gibt es einen Wert für *a*, so daß die Kugel k_a durch den Ursprung geht? Für welchen Wert von *a* berührt die Kugel k_a die x_1-x_3-Ebene? Geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes an!

b) Zeigen Sie: Alle Kugeln k_a berühren die Ebene *E* im selben Punkt *A*. Ermitteln Sie die Koordinaten des Berührpunktes *A*!

c) Gibt es weitere gemeinsame Punkte aller Kugeln k_a?

d) Für welche Werte von *t* sind die Geraden der Parallelenschar mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Tangenten an die Kugel k_1?

Aufgabenstellung: StR H. S.

F.17GK1 Abitur 1993 – Grundkurs 1

1. Gegeben ist die Funktion *f* mit der Gleichung $f(x) = \frac{81}{x^2+27}$.

a) Untersuchen Sie diese Funktion auf Symmetrie und Nullstellen!

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte dieser Funktion!

c) Bestimmen Sie die Wendepunkte dieser Funktion!

d) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von *f* im Intervall [–6; 6]! Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an!

Die Funktion *f* gehört für *t* = 3 zur Funktionenschar f_t, die durch folgenden Term gegeben ist: $f_t(x) = \frac{t^4}{x^2+3t^2}$, $t > 0$.

e) Bestimmen Sie für allgemeines *t* die Koordinaten der Wendepunkte von f_t! Auf welcher Kurve liegen diese Wendepunkte?

f) Ein Punkt *P(x;y)* liege im 1. Quadranten auf dem Graphen von f_t. *P* sei der Eckpunkt eines achsenparallelen Rechteckes, das der Fläche zwischen dem Graphen von f_t und der *x*-Achse einbeschrieben ist.
Für welches *x* hat das Rechteck maximalen Flächeninhalt? Für welches *t* ist dieses Rechteck mit maximalem Flächeninhalt ein Quadrat?

2. Die Punkte $A(-3|-6|1)$, $B(3|2|3)$ und $C(6|-2|0)$ liegen in der Ebene E. Außerdem ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

   a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E und berechnen Sie den Abstand des Punktes $D(0|5|2)$ von E!

   b) Welche Koordinaten besitzt der Schnittpunkt S der Ebene E mit der Geraden g? Wie groß ist der Winkel zwischen g und E?
   (E: $2x - 3y + 6z = 18$)

   c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h, die durch D verläuft und senkrecht auf der Ebene E steht!
   Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes L der Ebene E mit der Geraden h?
   (h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$)

   d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreieckes $\Delta\, DSL$!
   ($S(0|4|5)$; $L(\frac{6}{7} | \frac{26}{7} | \frac{23}{7})$)

Aufgabenstellung: StR z. A. G. W.

F.17GK2 — Abitur 1993 – Grundkurs 2

1. Die Funktion f mit dem Term $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ sei gegeben.

   a) Fertigen Sie eine Kurvendiskussion für f an.* Zeichnen Sie den Graphen im Bereich [–4; 4]. (Einheiten auf den Achsen: 2 cm)

   b) Jeder Punkt $P(x|f(x))$ der Funktion f legt mit der y-Achse, der Asymptote (g: $g(x) = 1$) und dem Punkt $S(0|1)$ ein Rechteck fest.

      i) Zeichnen Sie 1. für $x = 2$ und
      2. für $x = -0{,}5$ die zugehörigen Rechtecke in den Graphen ein. Welche Fläche haben diese Rechtecke?

      ii) Wie lautet der Term $F(x)$, mit dem man den Flächeninhalt der Rechtecksfläche berechnet (für jeden Punkt $P(x|f(x))$)? (Es darf dabei $F(x)$ auch negativ werden, d. h. es soll um „orientierte“ Rechtecksinhalte gehen.)

      iii) Was kann man über das asymptotische Verhalten der Funktion „F“ aussagen? (Wie kann man das Ergebnis geometrisch deuten?) Zeigen Sie, daß F ein Maximum hat. Welchen Flächeninhalt hat dem-

* Zur Erinnerung: Eine Kurvendiskussion umfaßt die Bestimmung folgender Punkte: Linearfaktorzerlegung und Definitionsmenge, Lückenbetrachtung, asymptotisches Verhalten, Symmetrie, y-Achsenabschnitt, Nullstellen, Steigungsverhalten und Extrempunkte, Krümmungsverhalten und Wendestellen, gegebenenfalls unterstützende Wertetabelle, Graph der Funktion.

nach das größtmögliche Rechteck, das zwischen dem Graphen von *f*, der Asymptote und der *y*-Achse eingetragen werden kann?

Der Flächeninhalt zwischen der Kurve *f* und der *x*-Achse im Bereich zwischen den Wendepunkten von *f* soll näherungsweise bestimmt werden.

Wendepunkte: $(-\frac{1}{3}\sqrt{3} \mid -\frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{3}\sqrt{3} \mid -\frac{1}{2})$

Steigung dort: $-\frac{3}{4}\sqrt{3}$ bzw. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

Dazu folgende Aufgaben:

c) i) Bestimmen Sie die Wendetangenten der Funktion *f*.
   ii) Zeichnen Sie die Wendetangenten in das Schaubild von *f* ein.
   iii) Durch die Wendetangenten ist ein Obermaß für den gesuchten Flächeninhalt von *f* über dem genannten Bereich festgelegt. Wie groß ist der Wert?

2. Die Wendepunkte und die Steigung der Kurve von Aufg. 1 sind wie folgt, wenn man sie in den Raum einbettet:

Wendepunkte: $(-\frac{1}{3}\sqrt{3} \mid -\frac{1}{2} \mid 0)$ und $(\frac{1}{3}\sqrt{3} \mid -\frac{1}{2} \mid 0)$

(*x*/*y*-)Steigung dort: $-\frac{3}{4}\sqrt{3}$ bzw. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

a) Bestimmen Sie die Wendetangenten im Raum (Punkt-Richtungs-Gleichung) Bestimmen Sie die beiden Ebenen E_1, E_2 in der Hesseschen Normalenform, in denen die Wendetangenten (wie oben festgelegt) liegen, und deren Schnittgerade parallel zur *z*-Achse verläuft.

In Anlehnung an die Aufgabe 1 sollen die beiden Ebenen im folgenden Tangentialebenen genannt werden.

b) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die Lage der Ebenen im Raum erkennbar wird. (Dabei soll die *z*-Achse ausnahmsweise nach vorne, die *x*-Achse nach rechts und die *y*-Achse nach oben weisen.)

c) Bestimmen Sie die zwei Ebenen F_1, F_2, die jeweils den Abstand *r* von den Ebenen E_1', E_2' haben und „oberhalb“ dieser Ebenen liegen (d. h. zwischen dem Nullpunkt und den Ebenen). Die beiden Ebenen E_1' und E_2' seien folgendermaßen festgelegt: Je ein Wendepunkt und der Punkt $Y(0|-1{,}25|0)$ sollen hierin liegen, und sie sollen ferner die Richtung der z-Achse haben. Der Abstand soll $r = \frac{1}{9}\sqrt{43}$ sein.

d) Wenn man eine Kugel mit dem Radius *r* (s. Teil c) auf einer der Tangentialebenen E_1' und E_2' von oben abrollen läßt, so daß sich der Kugelmittelpunkt in der *xy*-Ebene bewegt: Wo kommt dieser Mittelpunkt dann zur Ruhe? In welchen Punkten berührt die Kugel dann die Ebenen E_1' und E_2'?

Aufgabenstellung: OStR Dr. M. L.

F.18LK Abitur 1994 – Leistungskurs

1. Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} (1-x)\cdot e^x & \text{für } -\infty < x \le 1 \\ \frac{1-x^2}{x^2} & \text{für } 1 < x < \infty \end{cases}$$

   a) Untersuchen Sie die Funktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Wie verhält sich *f* für $x \to \pm\infty$?

   b) Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen von *f*, und zeichnen Sie den Graphen im Bereich $-2 \le x \le 3$ (LE = 2 cm)!

   c) Gegeben sei die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x) = (1-x)\cdot e^x$. Berechnen und deuten Sie $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^1 g(x)\,dx$, $a < 1$.

   d) Stellen Sie eine Formel für $g^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, auf, und beweisen Sie diese Formel.

2. Im kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden

$$g\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} \text{ und } g_1\colon\ x_2 = 2x_1 + 11 \text{ gegeben.}$$

   a) Zeigen Sie, daß die Gerade g_1 eine senkrechte Projektion der Geraden g auf die x_1x_2-Ebene ist. In welchem Punkt S und unter welchem Winkel α schneidet die Gerade g die x_1x_2-Ebene?

   b) Untersuchen Sie, ob die Geraden g, g_1 und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen.

   c) Für R^2 gilt der Satz: „Eine Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ ist genau dann Tangente an einen Kreis mit der Gleichung $\vec{x}^2 = r^2$, wenn $\vec{u}^2 r^2 = \vec{a}^2\vec{u}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{u})^2$ gilt.“

   Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Formel die Gleichung des Kreises, der die Gerade g_1 berührt.

   d) Beweisen Sie den in c) angegebenen Satz.

3. Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_a(x) = a\cdot\ln x + (1-a)\cdot\tfrac{1}{x};\ a \in\,]0,1].$$

   a) Zeigen Sie, daß jede Funktion der Funktionenschar als einzigen Extremwert ein Minimum besitzt, und bestimmen Sie die Koordinaten des entsprechenden Tiefpunktes.

   Wie verhalten sich die Funktionen für $x \to 0$?

   Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen für $x > \frac{1-a}{a}$.

   Skizzieren Sie den zu $a = \frac{1}{2}$ gehörenden Graphen im Bereich $0 < x \le 4$ (LE = 2 cm).

b) Berechnen Sie allgemein den Inhalt F der Fläche, die von den Geraden mit den Gleichungen $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ und von einem Graphen der Graphenschar eingeschlossen wird. Diskutieren Sie das Ergebnis.

c) Schneidet jeder Graph der Graphenschar den Graphen der Funktion $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ im Bereich $1 \le x \le e$? Begründen Sie ausführlich Ihre Antwort.

Aufgabenstellung: StD G. Ha.

F.18GK1 Abitur 1994 – Grundkurs 1

1. Gegeben ist eine Schar von Funktionen durch den Term
   $f_a(x) = \frac{2-a}{4}x^3 + ax$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

   a) Diskutieren Sie die Funktion f_a für $a = \frac{8}{3}$ und zeichnen Sie ihren Graphen G_{f_a} im Intervall [–4,5; 4,5]!

   b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ haben die zugehörigen Funktionen genau eine Nullstelle? Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ so, daß f_a genau zwei Nullstellen hat?

   c) Untersuchen Sie die Graphen zweier verschiedener Funktionen f_{a_1} und f_{a_2} mit $a_1 \neq a_2$ auf gemeinsame Punkte!

   d) Je zwei Graphen der Funktionen f_{a_1} und f_{a_2} mit $a_1 \neq a_2$ schließen im Intervall [–2; 2] ein Flächenstück ein. Berechnen Sie seinen Inhalt! Fügen Sie eine Skizze der Graphen und des Flächenstücks bei. Die Berechnung von $f'_{a_1}(x)$ und $f'_{a_2}(x)$ führt auf die geometrische Deutung der Parameter a_1 und a_2. Formulieren Sie das Ergebnis!

2. Die Ebene E enthält die Punkte $A(6|–2|0)$, $B(–3|–6|1)$ und $C(3|2|3)$.

   a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E und berechnen Sie den Abstand des Punktes $D(0|5|2)$ von E.

   b) Sei $\overline{D}$ der zu D symmetrische Punkt bezüglich der Ebene E. Berechnen Sie die Koordinaten von $\overline{D}$!

   c) Sei g eine Gerade mit folg. Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Gerade g und Ebene E haben den Punkt S gemeinsam. Berechnen Sie die Koordinaten von S und den Winkel α zwischen g und E!

   d) Bestimmen Sie die Koordinaten derjenigen Punkte auf der x_1-Achse, von denen aus die Strecke $\overline{AC}$ unter einem rechten Winkel erscheint!

Aufgabenstellung: StD G. Hö.

F.18GK2 Abitur 1994 – Grundkurs 2

1. Gegeben ist die Funktion *f* durch $f(x) = \frac{1}{9}x^4 + \frac{8}{9}x^3 + 2x^2 - 3$.
   a) Bestimmen Sie die Nullstellen, die Extrem- und Wendepunkte, und zeichnen Sie den Graphen der Funktion *f* im Intervall [–5; 1,5].
   b) Welche ganzrationale Funktion *g* zweiten Grades besitzt einen Graphen, der den Graphen von *f* in seinen Wendepunkten $W_1(-3\,|\,0)$ und $W_2(-1\,|-\frac{16}{9})$ berührt?
   c) Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die von den Graphen von *f* und von *g* mit $g(x) = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x - 4$ eingeschlossen wird?
   d) An welcher Stelle aus [–3; 1] weichen die Funktionswerte von *f* und *g* am meisten voneinander ab? Geben Sie dieses Maximum an.
2. a) Eine Ebene E_1 ist gegeben durch die drei Punkte $A(-2|-5|1)$, $B(3|-4|2)$ und $C(-6|-6|2)$. Geben Sie eine Vektorgleichung für die Ebene E_1 an.
   b) Geben Sie eine Gleichung der zu E_1 parallelen Ebene E_2 an, die durch den Punkt $P(0|-14|0)$ verläuft. Bestimmen Sie Punkte *Q* und *R* in E_2, so daß *PQR* ein zu *ABC* kongruentes Dreieck darstellt.
   c) Berechnen Sie den Abstand der Punkte *A* und *P*. Dieser wird auch als Abstand der parallelen Ebenen E_1 und E_2 aufgefaßt.

      Untersuchen Sie rechnerisch, welche besondere Lage $\overrightarrow{AP}$ bzgl. der beiden Ebenen hat, und stellen Sie eine mögliche Definition für den Abstand paralleler Ebenen auf.
   d) Gegeben ist eine Schar von Ebenen durch

      $E_{(a|b)}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ b \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$; $a, b \in \mathbb{R}$.

      Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ sind $E_{(a|b)}$ und E_1 parallel zueinander, für welche Werte gibt es eine Schnittgerade?
   e) Bestimmen Sie die Schnittgerade von $E_{(2|0)}$ und E_1.

Aufgabenstellung: StR H. S.

F.19LK Abitur 1995 – Leistungskurs

1. Die Funktion *f* sei gegeben durch $f(x) = 4 - \dfrac{5}{e^{2x}+1}$.
   a) Führen Sie für die Funktion *f* eine Kurvendiskussion durch ($\mathbb{D}_f$, Null-, Extrem-, Wende-, Polstellen, Asymptoten) und zeigen Sie, daß der Graph von *f* punktsymmetrisch zum Punkt $W(0|1{,}5)$ ist.
      Hinweis: Der Graph einer Funktion *f* ist genau dann symmetrisch zum Punkt $P(x_p|y_p)$, wenn für alle $x \in \mathbb{D}_f$ gilt:
      $f(x_p + x) - y_p = y_p - f(x_p - x)$.

b) Zeichnen Sie den Graphen von *f* sowie die Asymptoten im Intervall [–2,5; 2,5] (1 LE = 2 cm).

c) Zeigen Sie, daß die Funktion *g* mit $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{4-x}$ Umkehrfunktion von *f* ist, und zeichnen Sie den Graphen von *g* in das vorhandene Schaubild. Was können Sie über die Symmetrie von *g* aussagen?

d) Wie groß ist der Inhalt der Fläche *A*, die der Graph von *g* mit den Koordinatenachsen im IV. Quadranten einschließt?

2. Gegeben seien folgende Vektoren des Raumes:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, daß die [Geraden] *g*: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ und *h*: $\vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$ windschief sind. Berechnen Sie den Abstand dieser Geraden mit Hilfe der Ihnen bekannten Formel.

b) Bestimmen Sie die Punkte $G \in g$ und $H \in h$ so, daß Abst(*g*,*h*) = $|\overrightarrow{GH}|$ ist.

c) Geben Sie die Gleichung der Kugel *k* an, deren Durchmesser die Strecke $\overline{GH}$ ist.
Hinweis: *G* = *p*(0|6|–3), *H* = *p*(–4|4|1).

d) Die Ebene *E* sei gegeben durch *E*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Welche zu *E* parallelen Ebenen berühren die Kugel *k*: $(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix})^2 = 9$?

Geben Sie deren Koordinatengleichungen an.

3. Die Funktion *f* sei gegeben durch $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{2x^2}$.

a) Führen Sie für die Funktion *f* eine Kurvendiskussion durch ($\mathbb{D}_f$, Symmetrie, Null-, Extrem-, Wende-, Polstellen, Asymptoten).

b) Zeichnen Sie die Graphen von *f* und *g* mit $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$ im Intervall [–5; 5] in ein Koordinatensystem (1 LE = 1 cm).

c) Zeigen Sie, daß die Funktion *h* mit $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3} & \text{für } |x| < 2 \\ f(x) & |x| \geq 2 \end{cases}$ eine für alle $x \in \mathbb{R}$ stetige und differenzierbare Funktion ist. Zeichnen Sie den Graphen von *h* in das vorhandene Schaubild.

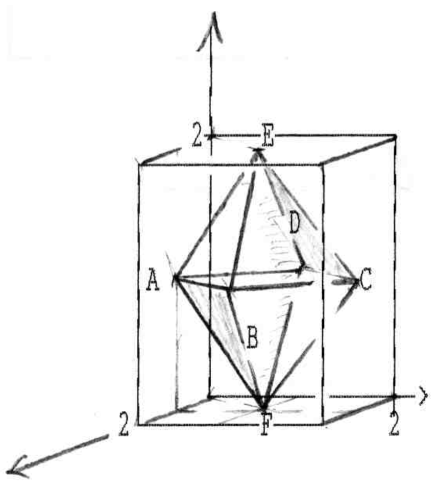
d) Die Graphen der Funktionen *g* und *h* sowie die Geraden *x* = –2 und *x* = 2 begrenzen eine Fläche. In diese Fläche soll symmetrisch zur *y*-Achse ein Rechteck *ABCD* so einbeschrieben werden, daß *A* und *B* auf dem Graphen von *h*, *C* und *D* auf dem Graphen von *g* liegen. Dabei soll *A* im I. Quadranten sein.

Bestimmen Sie die Koordinaten von A so, daß das Rechteck $ABCD$ maximalen Umfang hat. Berechnen Sie diesen maximalen Umfang und zeichnen Sie das maximale Rechteck in Ihr Schaubild.

Aufgabenstellung: StD Dr. W. S.

F.19GK1 Abitur 1995 – Grundkurs 1

1. Gegeben sei die Funktion f mit dem Term $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^2}$.
   a) Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der Funktion.
   b) Gebrochen rationale Funktionen werden für große Argumente x annähernd durch ganzrationale Funktionen, ihre Asymptoten, dargestellt. Geben Sie den Grad und den Term der zu f gehörigen Asymptotenfunktion g an.
   Zeichnen Sie den Graphen von g im Bereich [–4; 4]. (Einheiten: 1 cm)
   Schätzen Sie die Funktionswerte von f und g durch Ungleichungen ab. Was kann man folglich über die Lage der Graphen von g und f zueinander aussagen?
   c) Geben Sie den Definitionsbereich von f an. Welcher Art ist die Lücke im Definitionsbereich von f?
   d) Untersuchen Sie die Funktion auf Nullstellen, Extrema und Wendestellen.
   e) Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich [–4; 4]; (das kann in das bestehende Schaubild der Asymptote g geschehen).
2. Gegeben sei ein Würfel der Kantenlänge 2. Die Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels seien mit A, B, C, D, E und F bezeichnet, wie aus der Figur hervorgeht. Verbindet man diese Punkte, so erhält man ein Oktaeder, dessen Begrenzungsflächen 8 Dreiecke sind. (Anmerkung: Würfel und Oktaeder gehören zu den 5 Platonischen Körpern.)



   a) Zeigen Sie, daß die 12 Kanten des Oktaeders bis auf Orientierung Repräsentanten von nur 6 Vektoren bilden. Welche Folgerung kann man hieraus über die geometrische Lage der Kanten zueinander ziehen?
   b) Es gibt nur zwei mögliche Werte für die Abstände, die zwei Ecken des Oktaeders voneinander haben können! Warum ist das so? Wie groß sind die zwei möglichen Abstände?

c) Zeigen Sie, daß die Würfeldiagonale von (0|0|0) nach (2|2|2) senkrecht auf der Ebene steht, die von den Ecken *A*, *D* und *F* des Oktaeders gebildet wird („Berandungsfläche"). Warum gilt diese Aussage entsprechend für jede Würfeldiagonale und die von ihr durchstoßenen Dreiecke des Oktaeders?

d) Welchen Abstand hat der Punkt (2|2|2) von der Berandungsfläche, in der das Dreieck *BCE* liegt? Wie groß ist der Abstand irgendeiner Würfelecke von der ihr zugewendeten Dreiecksfläche des Oktaeders?

e) Zeigen Sie, daß die Dreiecke *ABE* und *CDF* in zwei zueinander parallelen Ebenen des Raumes liegen. Was kann man entsprechend für zwei gegenüberliegende Berandungsdreiecke des Oktaeders aussagen?

f) Bestimmen Sie die Diagonalenlänge des Würfels und den Abstand zweier gegenüberliegender Berandungsflächen des Oktaeders. Warum reicht es wiederum, dies mit einer Diagonalen und einem Paar von Berandungsflächen zu studieren? Wie wird jede Diagonale des Würfels durch die Berandungsdreiecke des Oktaeders geteilt, durch die sie hindurchgeht?

Aufgabenstellung: OStR Dr. M. L.

F.19GK2 — Abitur 1995 – Grundkurs 2

1. Im kartesischen Koordinatensystem sind die Ebenenschar E_t: $\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 2t$

   mit $t \in \mathbb{R}$ und die Punkte $P(5|7|1)$ und $Q(7|12|-2)$ gegeben.

   a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt *S* der Geraden *PQ* und der Ebene E_2!

   b) Welchen Abstand hat der Punkt *P* von der Ebene E_{-5}? Berechnen Sie auch den Schnittwinkel ε der Ursprungsgeraden durch den Punkt *P* mit der Ebene E_{-5}!

   c) Berechnen Sie die Schnittgerade *g* der Ebenen E_0 und E_1! Welche Lage hat diese Gerade zu den anderen Ebenen der Ebenenschar E_t?

   d) Zeigen Sie, daß unter der Bedingung $t_1 = -\frac{2}{t_2}$ ($t_2 \neq 0$) die zugehörigen Scharebenen E_{t_1} und E_{t_2} aufeinander senkrecht stehen! Bestimmen Sie <u>die</u> aufeinander senkrecht stehenden Ebenen der Ebenenschar E_t, die Tangentialebenen an eine Kugel um den Koordinatenursprung sind!

2. Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung $f_a(x) = ax^2 - a + 4$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

   a) Zeichnen Sie für $a = -\frac{1}{2}$ den Graphen der zugehörigen Funktion (LE = 1 cm)!

b) In die Fläche, die der in a) angegebene Graph mit der x-Achse einschließt, soll ein zur y-Achse symmetrisches Trapez so eingezeichnet werden, daß die beiden Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse Eckpunkte des Trapezes sind. Berechnen Sie, welches von allen möglichen Trapezen den größten Flächeninhalt hat!

c) Bestimmen Sie $u > 3$ so, daß die Gerade $x = u$ mit der x-Achse und dem in a) angegebenen Graphen ein Flächenstück mit dem Inhalt 9 QE einschließt!

d) In welchem Bereich muß der Parameter a gewählt werden, damit die Parabel $y = x^2$ Graphen der Funktionenschar f_a schneidet oder berührt?

Aufgabenstellung: StD G. Ha.

F.20LK — Abitur 1996 – Leistungskurs

1. Gegeben ist die Funktionenschar f_a zu $f_a(x) = \frac{x}{(x^2+a)^2}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge von f_a an und untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte sowie auf sein Verhalten für $x \to \pm\infty$ bzw. $x \to -\infty$. Führen Sie, falls nötig, eine Falluntersuchung durch. Zeichnen Sie die Graphen von f_1 und f_{-1} im Intervall [–3; 3] in ein gemeinsames Koordinatensystem. (Längeneinheit = 2 cm)

   b) Berechnen Sie den Inhalt der bis ins Unendliche reichenden Fläche zwischen der positiven x-Achse und dem Graphen von f_a für $a > 0$. Geben Sie den konkreten Wert für $a = 1$ an.

   c) Welche Bedingung müssen die Parameter a_1 und a_2 zweier Funktionen der Schar erfüllen, damit ihre Graphen genau einen gemeinsamen Punkt haben?

   d) Der Punkt $W(1|\frac{1}{4})$ ist der Wendepunkt von f_1 im ersten Quadranten. Welcher Graph aus f_a schneidet f_1 genau in diesem Punkt?

2. Gegeben ist die Funktionenschar $f_{a,b}$ zu $f_{a,b}(x) = ax^2 \ln bx$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b \in \mathbb{R}^+$; $D = \mathbb{R}^+$.

   a) Untersuchen Sie den Graphen von $f_{4,1}$ auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte sowie sein Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs. Zeichnen Sie den Graphen von $f_{4,1}$ im Intervall]0; 2]. (Längeneinheit 4 cm auf der x-Achse und 1 cm auf der y-Achse)

b) Berechnen Sie die Extrempunkte der Funktionenschar $f_{a,b}$. Welche Bedingung muß für den Parameter a gelten, damit die Extrempunkte von $f_{a,b}$
   1) auf der Geraden zu $g_1(x) = x$ oder
   2) auf dem Graphen zu $g_2(x) = x^2$ liegen?

c) Zeigen Sie: $\int x^n \cdot \ln kx \, dx = x^{n+1} \cdot \left(\frac{\ln kx}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$.

d) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das vom Graphen von $f_{a,b}$ und der x-Achse begrenzt wird. Für welche Wahl von a und b ist der Flächeninhalt 1?

3. Gegeben ist die Kugelschar $K(a)$ und zwei Geraden g_1 und g_2:

$K(a)$: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = a^2$ mit $a > 0$; g_1: $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; g_2: $\vec{x} = v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, daß die Mittelpunkte der Kugeln $K(a)$ auf einer Geraden g in der x_1x_2-Ebene liegen.

b) Zeigen Sie, daß die Geraden g_1 und g_2 Tangenten an jede Kugel $K(a)$ sind und ermitteln Sie die Berührpunkte $B_1(a)$ und $B_2(a)$.

c) Zeichnen Sie in der x_1y_2-Ebene die Schnittkreise der Kugeln $K(3)$ und $K(4)$ mit dieser Ebene und die Geraden g_1 und g_2. Ermitteln Sie den Mittelpunkt und den Radius des Schnittkreises der Kugeln $K(3)$ und $K(4)$.

d) Zeigen Sie, daß verschiedene Schnittkreise in zueinander parallelen Ebenen liegen.

e) Welche Bedingung muß für die Radien r_1 und r_2 zweier Kreise $K(r_1)$ und $K(r_2)$ der Schar gelten, damit sie sich berühren?

Aufgabenstellung: StR B. W.

F.20GK1 — Abitur 1996 – Grundkurs 1

1. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f an!

b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Asymptote für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$.

d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall [–6; 6].

e) Eine Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft, mit der Funktionsgleichung $g(x) = t$, $0 < t < 2$, schneidet den Graphen der Funktion f an den Stellen x_1 und x_2, ($x_1 < x_2$). Bestimmen Sie t so, daß sich ergibt: $x_2 - x_1 = 2$.

2. Gegeben sind die Punkte $A(6|0|0)$, $B(0|6|6)$ und $C(0|0|10)$.
   a) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D so, daß das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm bildet.
   b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 durch die Punkte A, B und C.
   c) Zeigen Sie, daß der Punkt $F(4|8|0)$ nicht in dieser Ebene liegt.
   d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene E_1 und der Ebene E_2 durch die Punkte B, C und F.
   e) Bestimmen Sie die Innenwinkel des Parallelogramms $ABCD$.
   (E_1: $5x + 2y + 3z = 30$; E_2: $7x + 4y + 6z = 60$; $D(6|-6|4)$)

Aufgabenstellung: StR G. W.

F.20GK2 — Abitur 1996 – Grundkurs 2

1. Die Funktionenschar mit den Termen $f_d(x) = x^4 - 2x^2 + d$, $d \in \mathbb{R}$ soll untersucht werden:
   a) Fertigen Sie eine Kurvendiskussion für f_1 (also d = 1) an. Zeichnen Sie den Graphen im Bereich [–2; 2]. (*)
   b) Welche Bedeutung hat der Parameter „d“ für die Graphen der Funktionen f_d? Erläutern Sie die Bedeutung kurz und zeichnen Sie die Graphen für d = 0 und d = 0,5 in das Schaubild (Aufg.teil a)) ein.
   c) Bestimmen Sie den Parameterwert d, d. h. die Funktion aus der Schar, für den folgendes Integral den Wert 0 annimmt: $\int_{-1}^{1} f_d(x)\,dx = 0$.
   d) Geben Sie die Gleichungen der Wendetangenten von f_d an.
   e) Für d = 1: Bestimmen Sie eine Parabel (2. Grades), die die Kurve von f_1 in den Wendepunkten von f_1 berührt, dort also insbesondere die gleichen Steigungen wie f_1 hat.

   * Zur Erinnerung: Eine Kurvendiskussion umfaßt die Bestimmung folgender Punkte: Linearfaktorzerlegung und Definitionsmenge, Lückenbetrachtung, asymptotisches Verhalten, Symmetrie, y-Achsenabschnitt, Nullstellen, Steigungsverhalten und Extrempunkte, Krümmungsverhalten und Wendepunkte, gegebenenfalls unterstützende Wertetabelle, Graph der Funktion.
2. Gegeben seien die beiden Ebenen

$$E{::}\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\frac{1}{3} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad F{::}\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   a) i) Geben Sie beide Ebenen in der Hesse-Normalenform an.
      ii) Welchen Winkel schließen die beiden Ebenen E und F ein?
      iii) Zeichnen Sie die beiden Ebenen in ein Koordinatenkreuz ein.
   b) Bestimmen Sie die Spur der Ebene E in der xy-Ebene E_{xy}.

c) Analog zum Vorgehen im Raum kann man auch die **Hesse-Normalen-Form einer Geraden in der Ebene E_{xy}** bestimmen.

i) Zeichnen Sie die Gerade g:: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{1}{3} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ in ein Koordinatenkreuz der Ebene E_{xy}.

ii) Bestimmen Sie den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ zur Gerade in der Ebene E_{xy}.

iii) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden vom Koordinatenursprung. Verwenden Sie hierzu die Mittel der Vektorrechnung. Überprüfen Sie das Ergebnis an der Zeichnung.

iv) Berechnen Sie das Skalarprodukt des Ortsvektors eines beliebigen Geradenpunktes mit dem Normaleneinheitsvektor.

v) Wie muß die Hesse-Normalenform einer Geraden in der Ebene heißen? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der allgemeinen Gleichung $y = mx + b$ und der Hesse-Form? Führen Sie Ihre Überlegungen aus und begründen Sie dabei.

Aufgabenstellung: OStR Dr. M. L.

F.21LK Abitur 1997 – Leistungskurs

1. Durch die Punkte $A(0|0|0)$, $B(0|0|8)$, $C(5|-2|8)$, $D(5|-2|0)$ und $S(6{,}5|9|4)$ ist eine Pyramide *ABCDS* mit der Grundfläche *ABCD* und der Spitze *S* gegeben.

   a) Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem.

   b) Beweisen Sie, daß die Grundfläche der Pyramide rechteckig ist und daß die Höhe die Grundfläche im Mittelpunkt des Rechteckes schneidet.

   c) Um wieviel Grad ist die Seitenfläche *ABS* der Pyramide zur Grundfläche *ABCD* geneigt?

   d) Zeigen Sie, daß die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$ parallel zur Pyramidengrundfläche *ABCD* liegt.

   e) In welcher Höhe über der Grundfläche schneidet die Ebene die Pyramide?

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften: $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$. Außerdem gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 9$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

   a) Berechnen Sie die Winkel $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$, $\beta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c})$.

   b) Bestimmen Sie einen zu $\vec{b}$ und $\vec{c}$ orthogonalen Vektor $\vec{d}$ der Form $\vec{d} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}$.

   c) Zeigen Sie, daß die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind.

(Hinweis: Stellen Sie $\vec{a}$ als Linearkombination von $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ dar.)

d) Unter welchen Bedingungen sind die Vektoren

$\vec{v}_t = (t+2)\,\vec{a} - \vec{b} + (t+1)\,\vec{c}$ und $\vec{w}_t = (t+3)\,\vec{a} + (t-1)\,\vec{b} + (t+1)\,\vec{c}$

linear abhängig?

e) Es sei $\vec{u}_k = k\vec{a} + 3\vec{b} - k\vec{c}$. Für welches k $\in \mathbb{R}$ gilt: $|\,\vec{u}_k\,| = 10$?

f) Es sei $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\vec{a}$ so, daß die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die obigen Bedingungen erfüllen.

3. Gegeben sei die Funktion *f* mit $f(x) = x \cdot (\ln x)^2$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion bei Annäherung an 0.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte des Funktionsgraphen *G*(*f*).

c) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen im Intervall [0; 3].
(1 Einheit ≙ 5 cm)

d) Beweisen Sie mittels partieller Integration, daß gilt:

$\int x \cdot (\ln x)^2 dx = 0{,}5 \cdot x^2 \cdot (\ln x)^2 - 0{,}5 \cdot x^2 \cdot \ln x + 0{,}25 \cdot x^2$

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die vom Funktionsgraphen, der Geraden $x = \frac{1}{e^2}$ und der *x*-Achse begrenzt wird.

Aufgabenstellung: StR G. W.

F.21GK — Abitur 1997 – Grundkurs

1. Für jedes *a* > 0 ist durch $f_a(x) = 8 \cdot \frac{x-a}{x^2}$; $x \neq 0$ eine Funktion gegeben.

Außerdem sei $f_0(x) = \frac{8}{x}$; $x \neq 0$.

a) Zeigen Sie: $f_a(x) = \frac{8}{x} - \frac{8a}{x^2}$, und bestimmen Sie die Null-, Extrem- und Wendestellen von f_a.

b) Zeichnen Sie die Graphen von f_0 und f_1 im Intervall]0; 8] in ein Koordinatensystem (1 LE = 2 cm, negativer Teil der *y*-Achse ist unwesentlich!)

c) Für *a* > 0 bilden im I. Quadranten die Koordinatenachsen sowie deren Parallelen durch den Hochpunkt $H_a(2a\,|\,\frac{2}{a})$ von f_a ein Rechteck. Für welches *a* wird dessen Umfang minimal? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

d) Die Geraden *x* = 2 und *x* = 8 sowie die Graphen von f_0 und f_1 umschließen im I. Quadranten eine Fläche *A*. Berechnen Sie den Inhalt von *A*.

2. Gegeben sei die Gerade *g*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   und die Ebene *E*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes *T* der Geraden *g* und der Ebene *E* sowie deren Schnittwinkel *α*.

   b) Die Punkte *P(*2|8|–6), *Q(*0|7|–4), *R(*2|5|–3) und *S(*4|6|–5) liegen in der Ebene *E* (Nachweis nicht erforderlich). Zeigen Sie, daß das Viereck *PQRS* ein Quadrat ist, und bestimmen Sie seinen Mittelpunkt *M*. Was stellen Sie fest?

   c) Es sei *h* die Senkrechte zur Ebene *E*, die durch den Punkt *M(*2|6,5|–4,5) geht ($\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$). Bestimmen Sie diejenigen Punkte *A* und *A*' auf *h*, die von *P(*2|8|–6) jeweils 3 Einheiten entfernt sind.

   d) Es sei *E** die von *g* und *h* erzeugte Ebene. Bestimmen Sie die Schnittgerade *i* von *E* und *E** und deuten Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

   [Quelle: nach Baden-Württemberg 1984]

Aufgabenstellung: StD Dr. W. S.

F.22LK — Abitur 1998 – Leistungskurs

1. Gegeben sei die (obere Halb-)Kreisfunktion $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Ferner der Punkt *P(*3|0). Die Menge aller Geraden von *P* zu einem Punkt von *f* legt eine Geradenschar mit dem Parameter $s \in [-2; 2]$ fest.

   a) Geben Sie diese Geradenschar $g_s(x)$, $s \in [-2; 2]$, an.

   b) Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurve *f* und die Gerade g_0, die durch *P* und den Punkt (0|2) auf dem Halbkreis geht? (Zeichnung und Berechnung)

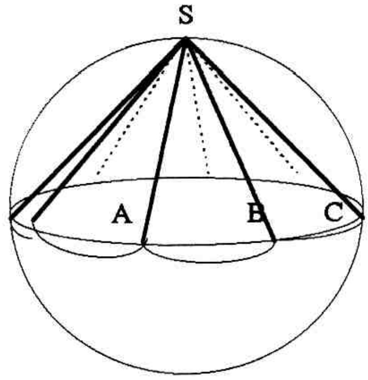
   c) Beschreiben Sie eine Methode, nach der man vorzugehen hat, um den Winkel zwischen zwei beliebigen Geraden *g* und *h* zu bestimmen.
   Es sei nun g_s eine beliebige Gerade der Schar durch *P* und ein Kurvenpunkt $(s \,|\, \sqrt{4 - s^2})$ von *f*. Gibt es einen Parameter $s \in [-2; 2]$, für den der Übergang von *f* nach g_s am Argument *s* „glatt“ ist?

   d) Es sei h_s die partiell definierte Funktion mit dem Term

$$h_s(x) = \begin{cases} f(x) = \sqrt{4 - x^2} & \text{mit } x \in [-2; s] \\ g_s(x) = \dfrac{\sqrt{4-s^2}}{s-3} \cdot x - \dfrac{3\sqrt{4-s^2}}{s-3} & \text{mit } x \in [s; 3] \end{cases} \quad \text{für } s \in [-2; 2].$$

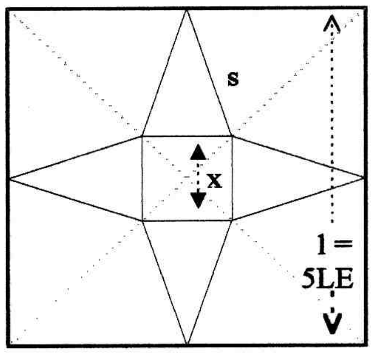
Wenn man die Funktion h_s um die x-Achse rotieren läßt, erhält man einen Rotationskörper. Bestimme das Volumen $V(s)$ dieses Körpers in Abhängigkeit vom Parameter s der Kurvenschar. Hat V ein Maximum?

2. Aus einem (etwa) kugelförmigen Stein mit Durchmesser 2 soll ein regelmäßiger Kristall geschnitten werden. Der Schliff soll (i. w.) die obere Halbkugel in eine senkrechte Pyramide mit achteckiger Grundfläche verwandeln, deren Ecken auf dem Rand der Halbkugel und deren Spitze von den Ecken gleich weit entfernt auf der Kugel liegen.



   a) Geben Sie zwei benachbarte Schleifebenen und deren gemeinsame Kante an.
   b) Welchen Winkel bilden zwei benachbarte Schleifebenen?
   c) Welchen Radius hat der Grundkreis der Kugelkappe, die man beim Abtrennen erhält, um die erste Schleiffläche auf dem kugelförmigen Stein zu erhalten? Wie hoch ist die Kappe?
   (Hinweis: Die algebraischen Ausdrücke der verlangten Werte sehen kompliziert aus; nähere das Endergebnis auf 2 Stellen hinter dem Komma.)

3. Das Volumen V einer Pyramide berechnet man mit der Formel $V = \frac{1}{3} G\,h$, wobei G den Flächeninhalt der Grundfläche und h das Maß der Höhe der Spitze S über der Grundfläche angibt.



   a) Das Netz einer quadratischen, senkrechten Pyramide sei so durch das Maß l = 5 LE beschränkt, wie es in der Zeichnung angedeutet ist.
      i) Zeigen Sie, daß unter dieser Nebenbedingung die Zielfunktion v zur Berechnung des Volumens der Pyramide in Abhängigkeit von der Kante x der Grundfläche den Funktionsterm
      $v(x) = \frac{1}{6} x^2 \cdot \sqrt{(5-x)^2 - x^2}$ hat.
      ii) Forme den Term von v so um, daß die Wurzelbildung zur äußeren Funktion wird.
   b) Zeigen Sie, daß die Funktion f mit dem Term $f(x) = \sqrt{-10x^5 + 25x^4}$ im Bereich [0; 2,5] ein Maximum besitzt. Geben Sie den Wert dieses Maximums an.
   c) Welche Maße hat eine Pyramide mit der Nebenbedingung aus a), die ein möglichst großes Volumen hat? Gib Volumen V, Grundkante x, Seitenkante s und die Höhe h der Pyramide an.

Aufgabenstellung: OStR Dr. M. L.

F.22GK1 Abitur 1998 – Grundkurs 1

1. Für jedes $a \in \mathbb{R}^{>0}$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

   $f_a(x) = \frac{1}{a}x^3 + 2x^2 + ax$ mit $x \in \mathbb{R}$.

   a) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte! Zeichnen Sie den Graphen von f_3 im Intervall [–4; 0,5] (Längeneinheit 2 cm)!
   b) Berechnen Sie die Steigung der Wendetangente. Für welches a ist die Senkrechte zur Wendetangente durch den Punkt $W(-\frac{2}{3}a \mid -\frac{2}{27}a^2)$ eine Ursprungsgerade?
   c) Der Graph zu f_4 schließt mit der x-Achse ein Flächenstück ein, dem ein rechtwinkliges Dreieck derart einbeschrieben werden soll, daß eine Kathete auf der x-Achse liegt und der Ursprung sowie ein Punkt auf dem Graphen die Endpunkte der Hypotenuse bilden. Welches dieser Dreiecke hat maximalen Flächeninhalt?
   d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f_1 und f_4!

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -t \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}^{\neq 0}$.

   a) Für welche Werte t sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig?
   b) Zeigen Sie, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ für $t = -1$ linear abhängig sind. Läßt sich in diesem Fall jeder der drei Vektoren durch die anderen beiden darstellen?
   c) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E_t, in der das Dreieck ABC liegt, dabei seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Ortsvektoren der Punkte A, B und C. Berechnen Sie den Abstand der Ebene E_2 vom Ursprung des Koordinatensystems!
   d) Ermitteln Sie den Normalenvektor von E_t. Zeigen Sie, daß E_t für kein t parallel zu einer der Koordinatenebenen ist.

Aufgabenstellung: StR B. W.

F.22GK2 Abitur 1998 – Grundkurs 2

1. Gegeben sei die Funktionenschar f_t für $t > 0$: $f_t(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 + 3t^2}$; $x \in \mathbb{R}$.

   Der Graph dieser Funktion sei G_t.

   a) Untersuchen Sie zunächst für $t = 1$ den Graphen G_1 von f_1 auf …
      i) Symmetrie und Nullstellen
      ii) Extrem- und Wendepunkte
      iii) Asymptoten.

      Zeigen Sie, daß für die 1. bzw. 2. Ableitung gilt:

$$f_1'(x) = \frac{24x}{(x^2+3)^2} \quad \text{bzw.} \quad f_1''(x) = \frac{72(1-x^2)}{(x^2+3)^3}.$$

b) Zeichnen Sie den Graphen G_1 für $-6 \leq x \leq 6$.

c) Der Graph G_1, die positive x-Achse und die Gerade $x = 1$ begrenzen eine Fläche der Maßzahl A. Für diesen Flächeninhalt A soll nun ein Näherungswert A^* bestimmt werden, indem man den tatsächlichen Graphen G_1 durch eine Näherungskurve, nämlich eine Parabel 4. Ordnung ersetzt.

   Diese Näherungsparabel soll symmetrisch zur y-Achse sein und den Graphen G_1 im Punkt $P(1|1)$ und im Ursprung berühren.

   i) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $p(x)$ dieser Parabel 4. Ordnung.

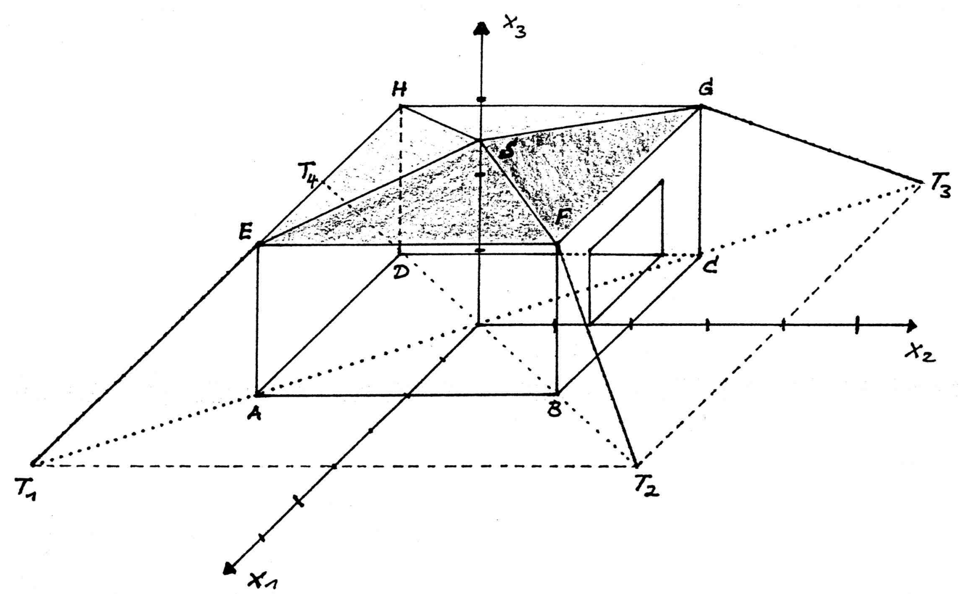
   ii) Berechnen Sie den Näherungswert A^* des Flächeninhalts A.

d) Auf der Geraden G_t liegen die Punkte $P_t(t|1)$ und $Q_t(-t|1)$. Wenn man in diesen beiden Punkten jeweils die Kurventangenten g_{TP} und g_{TQ} einzeichnet, schneiden sie sich im Punkt S.

   i) Bestimmen Sie Koordinaten von S und zeigen Sie, daß sie von t unabhängig sind.

   ii) Für welches t ist die Kurventangente g_{TP} in P_t orthogonal zur Kurventangente g_{TQ} in Q_t?

2. Ein Zelt mit quadratischer Grundfläche $ABDC$ hat die Seitenlänge 4 m. Die quadratische Grundfläche liegt in der x_1x_2-Ebene symmetrisch zu den Koordinatenachsen. Die vertikalen Stützstangen haben eine Höhe von 2 m. Die Spitze S des Dachs befindet sich 2,5 m über der Grundfläche, so daß die Dachkanten eine symmetrische Pyramide bilden. Zur Stabilisierung sind an den Ecken E, F, G, H gleich lange Spannschnüre befestigt, die in den Punkten T_1, T_2, T_3 und T_4 im Boden verankert sind. Die Punkte T_1, T_2, T_3 und T_4 bilden ebenfalls ein zu den Koordinatenachsen symmetrisches Quadrat mit der Seitenlänge 8 m.



Anmerkung: Bei den nachfolgenden Aufgaben sollen nur Lösungswege mit Methoden der Analytischen Geometrie beschritten werden, wenngleich auch bei einigen Teilaufgaben andere Lösungswege denkbar wären.

a) Geben Sie die Koordinaten aller genannter Punkte an.
b) Wie lang sind die Spannschnüre?
c) Wie groß ist der Winkel, den sie mit den vertikalen Stützstangen einschließen?
d) Stellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene *E* auf, in der die Dachfläche *SFG* liegt. (Zwischenergebnis: *E*: $x_2 + 4x_3 - 10 = 0$)
e) Wie groß ist der Neigungswinkel, um den die Ebene *E* gegen die Seitenfläche *BCGF* geneigt ist?
f) Ist der Winkel α_{DK} zwischen den Dachkanten in der Spitze *S* ein rechter?
g) Wie lauten die Koordinaten des Punktes *P* der Dachfläche *SFG*, der den geringsten Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems hat? Wie groß ist dieser Abstand?
h) Wie groß ist die Oberfläche des geschlossenen Zeltes?

Aufgabenstellung: L.i.A. T. W.

F.23LK Abitur 1999 – Leistungskurs

1. Gegeben sei die Funktion *f* mit $f(x) = x \cdot \sin^2 x$; $x \geq 0$.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente *t* an den Graphen der Funktion *f* im Punkt $B_1(\frac{\pi}{2} | f(\frac{\pi}{2}))$, und untersuchen Sie, in welchen weiteren Punkten dieselbe Tangente die Kurve berührt.
b) Zeichnen Sie den Graphen von *f* im Intervall [0; 2π]. (Maßstab: *x*-Achse: 1 cm ≙ $\frac{\pi}{8}$ E; *y*-Achse: 2 cm ≙ 1 E).
c) Die Tangente *t* schließt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Berührpunkten B_n und B_{n+1} jeweils eine Fläche A_n. Bestätigen Sie die Gültigkeit der Formel $| A_n | = \frac{n}{2} \cdot \pi^2$

(Teilergebnisse: $t(x) = x$; $B_n = p((2n-1)\cdot\frac{\pi}{2} | (2n-1)\cdot\frac{\pi}{2})$, $n \geq 1$.)

2. Gegeben sind die Ebenen

$$E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden *g* von E_1 und E_2 sowie den Schnittwinkel beider Ebenen.
b) Ermitteln Sie die Spurpunkte beider Ebenen.
c) Zeichnen Sie die Ebenen E_1 und E_2 sowie die Schnittgerade *g* in ein räumliches Koordinatensystem.

d) E_1 werde in $B_1(-1|2|7)$ und E_2 in $B_2(-1|-2|7)$ von der Kugel k: $(\vec{x}-\vec{m})^2 = 14$ berührt. Welchen Mittelpunkt M hat diese Kugel?

e) Die Kugel k rolle die Rinne, gebildet aus E_1 und E_2 hinab. Geben Sie die Geradengleichungen der Bahnen an, auf denen die Kugel die Ebenen berührt.

3. Gegeben seien die Funktionen f mit $f(x) = e^{2x}$ und f_a mit $f_a(x) = 2 \cdot a \cdot e^x$ ($a > 0$ fest; $x \in \mathbb{R}$).

a) Gehören f und f_a zur Lösungsmenge derselben Differentialgleichung $y' + k \cdot y = 0$? (k konstant) Erläutern Sie den Begriff der linearen Abhängigkeit zweier Funktionen an den gegebenen Beispielen.

b) Wie groß ist der Inhalt der Fläche A, die von den Funktionen f und $f_{\frac{1}{2}}$ über dem Intervall $]-\infty; 0]$ eingeschlossen wird? Zeichnen Sie die beiden Kurven in ein Koordinatensystem (Maßstab: x-Achse: 2 cm $\triangleq$ 1 E; y-Achse: 10 cm $\triangleq$ 1 E) im Intervall [–4; 0].

c) Für welches a wird die Fläche $A(a)$, die f und f_a über dem Intervall $]-\infty; 0]$ einschließen, minimal?
Hinweise: 1) Untersuchen Sie zunächst die Schnittstellen von f und f_a; 2) $|A(\frac{1}{2})| = \frac{1}{2}$.

Aufgabenstellung: StD Dr. W. S.

F.23GK Abitur 1999 – Grundkurse 1 und 2 (gleiche Aufgaben)

1. Gegeben ist die Funktionenschar f_a zu $f_a(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{ax^2}{4}$ mit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_1 auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte!
Zeichnen Sie den Graphen von f_1 im Intervall [–4; 4] (Längeneinheit 1 cm)!

b) Welches von den zur y-Achse symmetrischen Dreiecken, die ihre Spitze im Ursprung und die beiden anderen Eckpunkte auf dem Graphen von f_1 haben, hat den kleinsten Flächeninhalt?

c) Untersuchen Sie die Graphen von f_a auf Schnittpunkte mit der x-Achse und Extrempunkte und zeigen Sie, daß die Graphen genau dann Tiefpunkte haben, wenn sie keine Schnittpunkte mit der x-Achse haben! Finden Sie zwei Zahlen s und t, so daß die Extrempunkte von f_s und die gemeinsamen Punkte von f_t mit der x-Achse die Ecken eines Quadrates bilden!

2. Gegeben sind die Ebene E und eine Schar von Ebenen E_k:

$$E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix};\ E_k\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}k+16\\6\\0\end{pmatrix};\ k \in \mathbb{R}.$$

a) Untersuchen Sie die Vektoren $\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ auf lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit! Was folgt daraus für den Schnitt von E mit einer Ebene der Schar E_k?

b) Für welchen Wert von k erhält man die Ebene $6x_1 - 23x_2 - 14x_3 + 104 = 0$?

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und E_7. Zeigen Sie, daß die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}23\\6\\0\end{pmatrix}$ in der Ebene E_7 liegt und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden s und g.

d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(2a|3a|7)$ von der Ebene E und diskutieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Lage des Punktes P zur Ebene!

Aufgabenstellung: StR B. W. und StR z. A. Dr. E. W.

F.24LK Abitur 2000 – Leistungskurs

1. Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 3x^2e^{-x}$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte und sein Verhalten für $x \to \infty$. Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall in [–1; 6]. (Längeneinheit 1 cm)

b) Zeigen Sie: $\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$.

c) Berechnen Sie den Inhalt der bis ins Unendliche reichenden Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

d) Im Intervall [0; 2] soll der Graph von f durch den Graphen einer Funktion g angenähert werden. Dazu soll g eine ganzrationale Funktion dritten Grades sein, deren Graph ebenfalls den Tiefpunkt (0|0) besitzt, an der Stelle $x = 2$ einen Hochpunkt hat und an der Stelle $x = 1$ die Steigung $\frac{3}{e}$. Wie lautet die Funktionsvorschrift für g?

e) An welcher Stelle aus [0; 2] weichen die Funktionswerte von f und g mit $g(x) = \frac{1}{e}(-x^3 + 3x^2)$ am meisten von einander ab? Berechnen Sie diese Abweichung auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

2. Gegeben ist die Funktionenschar f_a zu $f_a(x) = \frac{x}{x^2 + a}$ mit $a \in \mathbb{R}$.
   a) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Definitionslücken, Symmetrie, Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte sowie auf sein Verhalten für $x \to \pm\infty$. Zeichnen Sie die Graphen von f_1 und f_4 im Intervall [–4; 4] in ein Koordinatensystem. (Längeneinheit 1 cm auf der x-Achse und 4 cm auf der y-Achse)
   b) Berechnen Sie den Inhalt der bis ins Unendliche reichenden Fläche, die die Graphen von f_1 und f_4 im 1. Quadranten einschließen.
   c) Schneiden sich die Graphen von f_1 und f_{-9} im Ursprung orthogonal? Welche Bedingung müssen die Parameter a_1 und a_2 zweier Funktionen der Schar erfüllen, damit sich ihre Graphen im Ursprung orthogonal schneiden?
   d) Zeigen Sie: Alle Graphen der Funktionenschar (bis auf einen) haben genau einen gemeinsamen Punkt. Wie lauten die Koordinaten des Punkts? Geben Sie auch den Ausnahmefall an.
3. Gegeben sind die Kugel K_1, die Gerade g und die Ebene E_1 mit

   K_1: $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 8)^2 = 169$, g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$ und

   E_1: $4x_1 - 3x_2 + 12x_3 + 60 = 0$.
   a) Weisen Sie nach, dass E_1 Tangentialebene von K_1 ist. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes B.
   b) Berechnen Sie den Abstand d der Geraden g vom Mittelpunkt M der Kugel. Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene E_2 von K_1, in der g liegt?
   c) Zeigen Sie: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 12x_1 - 3x_2 - 24x_3 = 52$ ist Gleichung einer Kugel K_2; geben Sie Mittelpunkt M_2 und Radius r_2 an.
   d) Wie lautet die Koordinatengleichung der Ebene E_3, in der sich die Kugeln K_1 und K_2 schneiden? Geben Sie eine Strategie an, wie man die Koordinaten des Mittelpunktes M_3 und den Radius r_3 des Schnittkreises k_3 von K_1 und K_2 berechnen kann.

Aufgabenstellung: StR B. W.

F.24GK — Abitur 2000 – Grundkurse 1 und 2

1. Gegeben ist eine Funktionenschar f_a mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}^+$:

   $f_a(x) = \frac{x}{8} \cdot (x - a)^2$.
   a) Untersuchen Sie den Graphen von f_6 ($a = 6$) auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graphen von f_6 im Intervall [–0,5; 8,5].

b) Bestimmen Sie für den Graphen von f_a die Koordinaten der Extrempunkte und auch die Koordinaten des Wendepunktes in Abhängigkeit von dem Parameter a. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil a).

c) Für welchen Parameter a hat der Graph von f_a im Wendepunkt $W(\frac{2a}{3} \mid \frac{a^3}{108})$ die Steigung $m = -\frac{2}{3}$?

d) Bestimmen Sie die Fläche, die der Graph von f_a mit der x-Achse einschließt.
Für welches $a \in \mathbb{R}^+$ ergbit sich der Flächeninhalt 13,5 FE?

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4|2|0)$, $B(3|5|2)$ und $C(6|–2|1)$ und die Gerade g gegeben,

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ b \end{pmatrix},\ a, b, r \in \mathbb{R}.$$

a) Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C auf. Ermitteln Sie zudem eine Koordinatenform von E.
Der Punkt Q liegt in der Ebene E und hat drei gleiche Koordinaten. Berechnen Sie den Wert dieser drei Koordinaten.
(Mögliches Teilergebnis: $E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$)

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stützvektor der Ebene E und der x_2- bzw. x_3-Achse.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h, die senkrecht auf der Ebene E steht und durch den Punkt $P(5|0|3)$ geht. Wie lautet die Punkt-Normalenform einer zur Ebene E parallelen Ebene F durch den Punkt P?

d) Bestimmen Sie die Werte von a und b so, dass gilt:
(1) g liegt in E,
(2) E und g sind zueinander parallel, g liegt nicht in E und
(3) E und g haben genau einen Schnittpunkt.

Aufgabenstellung: StR Dr. E. W.

F.25LK Abitur 2001 – Leistungskurs

1. Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion f_k gegeben durch
$f_k(x) = \ln(1 + x) - \ln(k - x)$; $x \in D_k$. Der Graph sei G_k.

a) Zeigen Sie, dass für die maximale Definitionsmenge D_k gilt: $D_k = \{x \mid -1 < x < k\}$. Führen Sie für G_k eine Kurvendiskussion (Achsenschnittpunkte, Extrema, Wendepunkte und Asymptoten) durch.
Zeichnen Sie G_6 samt Asymptoten. (LE 1 cm)
Weisen Sie nach, dass G_6 punktsymmetrisch bezüglich des Wendepunktes ist.

b) Die Tangente an der Nullstelle des Graphen G_k und die Koordinatenachsen bilden ein Dreieck. Für welchen Wert $k \neq 1$ ist dieses Dreieck gleichschenklig?

c) Der Graph G_6 schließt mit den Koordinatenachsen im 4. Quadranten eine Fläche ein. Berechnen Sie deren Inhalt.

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sei die Ebene E_1 gegeben durch: E_1: $x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$. Ferner seien die Punkte $A(8|-3|0)$, $B(0|3|4)$ und $C(2|1{,}5|-3)$ gegeben, die zur Ebene E_2 gehören.

a) Bestimmen Sie die Ebenengleichung zu E_2.

b) Unter welchem Winkel schneiden sich die Ebenen E_1 und E_2?

c) Stellen Sie die Ebenen E_1 und E_2 im Koordinatensystem mit Hilfe ihrer Spurgeraden dar. (LE 1 cm, Verkürzungsfaktor $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ in x_1-Richtung)

d) Bestimmen Sie die Schnittgerade s der Ebenen E_1 und E_2 und zeichnen Sie diese ebenfalls in das Koordinatensystem ein.

e) Durch die Schnittpunkte von E_1 mit den Koordinatenachsen wird ein Tetraeder mit den Eckpunkten $S_1(4|0|0)$, $S_2(0|4|0)$ und $S_3(0|0|4)$ festgelegt. In diesen Tetraeder soll eine Kugel K eingefügt werden, die alle Seitenflächen des Tetraeders berührt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes $M(m_1|m_2|m_3)$ der Kugel, den Radius r und die Koordinaten des Berührpunktes $B(b_1|b_2|b_3)$ der Kugel K mit der Ebene E_1.
(Teilergebnis: $M\left(\frac{4}{3+\sqrt{3}} \,\middle|\, \frac{4}{3+\sqrt{3}} \,\middle|\, \frac{4}{3+\sqrt{3}}\right)$)

f) Stellen Sie fest, ob die Kugel K mit der Ebene E_2 einen Schnittkreis besitzt.

3. Zur Herstellung eines Trichters (Kegels) wird eine vorgegebene Kreisfläche $K(R)$ mit Radius R längs des Radius $\overline{AM}$ durchschnitten. Der Kreissektor AMB mit dem Mittelpunktswinkel α wird herausgeschnitten bzw. überdeckt und die Strecke $\overline{AM}$ mit der Strecke $\overline{BM}$ zur Deckung gebracht.

a) Zeigen Sie, dass man das Kegelvolumen in Abhängigkeit des halben Öffnungswinkels φ folgendermaßen angeben kann:
$V_{\text{Kegel}}(\varphi) = \frac{1}{3}\pi R^3 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi$

Anmerkung: Der Schwerpunkt der nachfolgenden Aufgaben b) und c) besteht darin, die <u>exakten</u> Darstellungen von Höhe h, Radius r und Mittelpunktswinkel α zu finden.

b) Ermitteln Sie die exakte Höhe h und den exakten Radius r der Grundfläche des Kegels (s. Abb. 1), bei dem das Kegelvolumen ein Maximum für den vorgegebenen Radius R der Kreisfläche hat. Geben Sie h und r für R = 8 cm an.

c) Bestimmen Sie die exakte Größe des Mittelpunktswinkels α des Kreissektors AMB, der herausgeschnitten bzw. überdeckt werden soll.

Aufgabenstellung: L.i.A. T. W.

F.25GK1 Abitur 2001 – Grundkurs 1

1. Gegeben sei die Funktion *f* mit $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$.
   a) Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion *f* an!
   b) Untersuchen Sie die Funktion *f* auf Symmetrie, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.
   c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Asymptote für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$.
   d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *f* im Intervall [–6; 6].
   e) Eine Gerade, die parallel zur *x*-Achse verläuft, mit der Funktionsgleichung $g(x) = t$, $0 < t < 2$, schneidet den Graphen der Funktion *f* an den Stellen x_1 und x_2, ($x_1 < x_2$). Bestimmen Sie *t* so, dass sich ergibt: $x_2 - x_1 = 2$.
2. Gegeben sind die Punkte *A(*6|0|0), *B(*0|6|6) und *C(*0|0|10).
   a) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes *D* so, dass das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm bildet.
   b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 durch die Punkte *A*, *B* und *C*.
   c) Zeigen Sie, daß der Punkt *F(*4|8|0) nicht in dieser Ebene liegt.
   d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene E_1 und der Ebene E_2 durch die Punkte *B*, *C* und *F*.
   e) Bestimmen Sie die Innenwinkel des Parallelogramms *ABCD*.
   (E_1: $5x + 2y + 3z = 30$; E_2: $7x + 4y + 6z = 60$; *D(*6|–6|4))

Aufgabenstellung: StR G. W.

F.25GK2 Abitur 2001 – Grundkurs 2

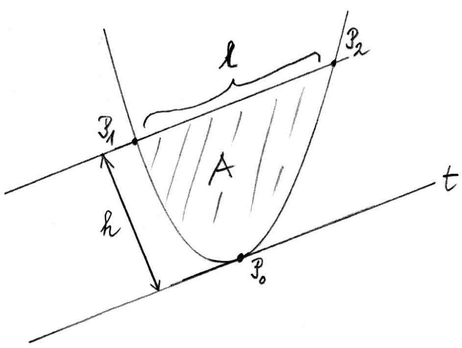
1. Die Funktion *f* sei gegeben durch $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Zeigen Sie: $f(x) = \frac{1}{8} \cdot x \cdot (x-4) \cdot (x-8)$.
   b) Bestimmen Sie die Nullstellen sowie die Extrem- und Wendepunkte von *f*.
   c) Zeigen Sie, dass für alle *x* > 0 gilt: $-f(4-x) = f(4+x)$.
   Verwenden Sie den Term aus dem Aufgabenteil 1a) und interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.
   d) Zeichnen Sie den Graphen von *f* im Intervall [–1; 9]. (Wertetabelle!)
   e) Die Gerade *g* durch *W*(0|4) mit der Steigung $-\frac{7}{8}$ schließt mit dem Graphen von *f* eine Fläche *A* ein. Zeichnen Sie *g* ins vorhandene Schaubild und bestimmen Sie den Inhalt von *A*.

2. Gegeben seien die sechs Punkte $A(12|9|3)$, $B(6|17|3)$, $C(-2|11|3)$, $D(4|3|3)$, $S(5|10|8)$ und $T(5|10|-2)$. Diese sechs Punkte bilden eine Doppelpyramide mit den beiden Spitzen S und T.
   a) Zeichnen Sie die Doppelpyramide $ABCDST$ in ein räumliches Koordinatensystem.
   b) Zeigen Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist und bestimmen Sie die Koordinaten seines Diagonalenschnittpunktes M. Zeigen Sie ferner, dass die Strecke ST senkrecht auf der Quadratfläche steht und von M halbiert wird.
   c) Zeigen Sie, dass die Dreiecke ASD und ATB kongruent sind, und bestimmen Sie die drei Innenwinkel des Dreiecks ASD.
   d) Welchen Winkel schließt das Quadrat $ABCD$ mit dem Dreieck ABS ein? Vermuten Sie anhand der Zeichnung aus Aufgabenteil 2a), welchen Winkel das Quadrat mit den übrigen Dreiecken einschließt.
   e) Welchen Abstand hat der Punkt $M(5|10|3)$ vom Dreieck ABS? Bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes F von M und zeichnen Sie das Lot $\overline{MF}$ in das vorhandene Schaubild.

Aufgabenstellung: StD Dr. W. S.

F.26LK — Abitur 2002 – Leistungskurs

1. Gegeben sind die Funktionen f und g mit
   $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + 2$ und $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.
   a) Zeichnen Sie die Graphen von f und g in ein Koordinatensystem und berechnen Sie den Inhalt der von f und g eingeschlossenen Fläche A.
   b) Nach einer auf Archimedes von Syrakus (287–212 v. Chr.) zurückgehenden Formel gilt für den Flächeninhalt A eines Parabelsegments mit den in der Abbildung angegebenen Bezeichnungen: $A = \frac{2}{3} \cdot l \cdot h$.



   Die Sekante P_1P_2 und die Tangente P_0 an die Parabel verlaufen parallel zueinander.
   Bestätigen Sie, dass sich nach obiger Formel der in Teil a) berechnete Wert für den Flächeninhalt ergibt.
2. Gegeben sind die folgenden Vektoren des Raumes:
   $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Die Geraden *i*: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v}$ und *j*: $\vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{w}$ sind windschief. Berechnen Sie den Abstand der Geraden mit Hilfe der Ihnen bekannten Formel.

b) Bestimmen Sie die Punkte $G \in i$ und $H \in j$ so, dass Abst(i,j) = $|\overrightarrow{GH}|$ ist. Fertigen Sie dazu eine Skizze an, und stellen Sie die Vektoren $\vec{g}$, $\vec{h}$ sowie $\overrightarrow{GH}$ mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dar.

c) Geben Sie eine Gleichung der Kugel *k* an, deren Durchmesser die Strecke $\overline{GH}$ ist.
Hinweis: $G(0|6|-3)$, $H(-4|4|1)$.

d) Es sei *E*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Welche zu *E* parallelen Ebenen E_1 und E_2 berühren die Kugel *k*: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right)^2 = 9$?

3. In einer Urne befinden sich 10000 Kugeln. Man vermutet, dass 10 % von ihnen weiße, der Rest schwarze Kugeln sind. Der Urne werden 100 Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Sollten weniger als 5 und mehr als 15 Kugeln weiß sein, so entschließt man sich, von der Vermutung p = 10 % abzugehen.

   a) Geben Sie eine obere Schranke für die Irrtumswahrscheinlichkeit bei dieser Entscheidungsregel an.

   b) Wie muss man die Entscheidungsregel ändern, damit die Irrtumswahrscheinlichkeit für die Hypothese p = 10 % kleiner als 15 % ist?

   c) Eine andere Entscheidungsregel lautet wie folgt:
   Man ziehe 10 Kugeln mit Zurücklegen. Kommt in dieser Stichprobe höchstens eine weiße Kugel vor, so nimmt man die Hypothese p = 10 % an, sind mehr als zwei Kugeln weiß, so lehnt man die Hypothese ab. Sind genau zwei Kugeln weiß, so zieht man ein zweites Mal 10 Kugeln mit Zurücklegen und nimmt die Hypothese nur dann an, wenn in dieser Stichprobe keine weiße Kugel mehr vorkommt. Geben Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit bei dieser Entscheidungsregel an.

Aufgabenstellung: StD Dr. W. S.

F.26GK1 Abitur 2002 – Grundkurs 1

1. Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch $f_a(x) = \frac{2-a}{4}x^3 + ax$; $a \in \mathbb{R}$.

a) Für $a = \frac{8}{3}$ ergibt sich der Funktionsterm $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{3}x$. Untersuche Sie die Funktion f auf Symmetrie, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, und zeichnen Sie ihren Graphen im Intervall [–4,5; 4,5].

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f im Intervall [0; 4] mit der positiven x-Achse einschließt!

c) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ haben die zugehörigen Funktionen der Schar genau eine Nullstelle? Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass f_a genau zwei Nullstellen hat (Begründung!)?

d) Untersuchen Sie die Graphen zweier verschiedener Funktionen f_{a_1} und f_{a_2} mit $a_1 \neq a_2$ auf gemeinsame Punkte.

e) Je zwei Graphen zweier verschiedener Funktionen f_{a_1} und f_{a_2} mit $a_1 \neq a_2$ schließen im Intervall [–2; 2] ein Flächenstück ein. Berechnen Sie seinen Inhalt.

2. Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

und die Ebene E: $14x_1 - x_2 + 8x_3 = 52$.

a) Weisen Sie nach, dass die Geraden g und h windschief zueinander sind. Zeigen Sie, dass ihre Richtungsvektoren nicht orthogonal zueinander sind. In welchem Winkel stehen sie zu einander?

b) Zeigen Sie, das die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft und h in E liegt. Erläutern Sie, wie man zu zwei windschiefen Geraden eine Gleichung der Ebene erstellen kann, die die eine Gerade enthält und zur anderen parallel verläuft.

c) Wegen $g \parallel E$ hat jeder Punkt auf g den gleichen Abstand zu E. Berechnen Sie den Abstand d des Punktes $A(2{,}5|4|0)$ von E.

d) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene $E^{\perp}$ auf, die orthogonal zur Ebene E verläuft und die Gerade h enthält (begründen Sie Ihr Vorgehen). Geben Sie eine Strategie an, wie man mit Hilfe der Ebene $E^{\perp}$ die Punkte $P \in g$ und $Q \in h$ bestimmen kann, die genau den Abstand d aus Aufgabenteil c) haben.

Aufgabenstellung: StR H. S.

F.26GK2 — Abitur 2002 – Grundkurs 2

1. a) Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat bei $x = 1$ ein Minimum, bei $x = 2$ den Steigungswinkel der Größe 45° und ist bezüglich des Punktes $S(2 \mid \frac{2}{3})$ symmetrisch. Bestimme den Funktionsterm $f(x)$!

(Hinweis: Überlege zunächst, welche Bedeutung die Symmetrieaussage für besondere Punkte und welche Bedeutung die Angabe des Winkels für die Steigung hat.)

Statt einer Probe:

b) Fertige eine Kurvendiskussion für $g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x-\frac{4}{3}$ mit den üblichen Mitteln an und zeichne den Graphen der Funktion (Einheit auf der *x*-Achse: 1 cm).
(Üblich: Definitionsbereich, asymptotisches Verhalten, Symmetrie, *y*-Achsenabschnitt und Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte, evtl. eine Wertetabelle, Graph von *g*)

c) Bestimme die Fläche, die die Funktion *g* mit der *x*-Achse zwischen den beiden (äußeren) Nullstellen 1 und 4 einschließt.
Zusatz: Was würde sich ergeben, wenn man statt der Integration von *g* die Integration der unter a) ermittelten Funktion *f* vornähme?

2. Gegeben seien zwei windschiefe Geraden *g* und *h* im Raum.

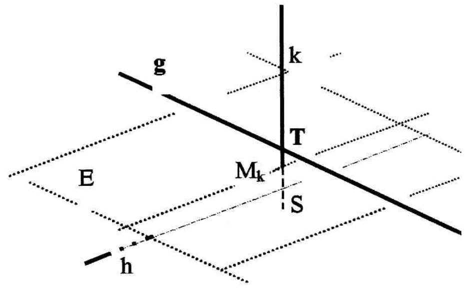
a) Beschreibe eine Strategie, wie man die Gleichungen der Ebene *E* bestimmen kann, die so zwischen den Geraden liegt, dass sie von den beiden Geraden gleich weit entfernt ist: $d(E,g)=d(E,h)\ (\neq 0)$.

b) Gegeben seien die beiden Geraden

$$g\colon\colon\ x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\qquad h\colon\colon\ x=\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

- Bestimme den Abstand der beiden Geraden und Punkte *P* auf *g* und *Q* auf *h*, die diesen Abstand markieren.
- Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt *M* der Strecke *PQ*?

c) Die Gerade $k\colon\colon\ x=\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$



ist eine Verbindungsgerade zwischen den Geraden *g* und *h* (aus Teil b).
- Bestimme die Schnittpunkte *T* von *g* mit *k* und *S* von *h* mit *k*.
- Wie lauten die Koordinaten des Mittelpunktes M_k zwischen *T* und *S*?
- Welche Winkel schließen die Geraden *g* und *k* bzw. *h* und *k* ein?

d) Wo liegen die Mittelpunkte M_{XY} der Verbindungsstrecken zweier Punkte *X* auf *g* und *Y* auf *h*? Beschreibe ihre Lage mittels einer Gleichung. Interpretiere die Gleichung: Welche Form hat die Gleichung?

e) Gib die Ebene *E* zwischen *g* und *h* (aus Teil b) an, die die Geraden im Sinne der Teilaufgabe a) trennt.
Zusatz: Welche Lage hat die Gerade von Teil d) in Bezug auf diese Ebene?

Aufgabenstellung: StD Dr. M. L.

F.27LK Abitur 2003 – Leistungskurs

1. Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch $f_a(x) = 3xe^{ax^2}$; $a \in \mathbb{R}$.
   a) Untersuchen Sie die Funktionen f_a auf ihre Definitionsmenge, Symmetrie zum Nullpunkt bzw. zur y-Achse, Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen sowie das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und zeichnen Sie den Graphen von $f_{-\frac{1}{2}}$ im Intervall [–3; 3].

      (Bei der Untersuchung auf Wendestellen kann auf das hinreichende Kriterium verzichtet werden.)
   b) Im Intervall [0; 1] soll der Graph zu $f_{-\frac{1}{2}}$ durch den Graphen einer Funktion g approximiert werden. Dazu soll g eine ganzrationale Funktion zweiten Grades sein, deren Graph ebenfalls den Hochpunkt $(1|\frac{3}{\sqrt{e}})$ hat. Bestimmen Sie den Funktionsterm zu g.
   c) Um die Güte der Approximation beurteilen zu können, soll die maximale Abweichung der Funktionswerte von f und g im Intervall [0; 1] bestimmt werden. Beschreiben Sie eine Möglichkeit zur Bestimmung dieser maximalen Abweichung. (Die Berechnung selbst ist nicht verlangt.) Geben Sie für den Fall, dass die Abweichung für die angestrebte Approximation zu groß ist, Möglichkeiten an, diese Approximation zu verbessern.
2. Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch $f_a(x) = \frac{4x}{(x-a)^2}$; $a \in \mathbb{R}$.
   a) Untersuchen Sie die Funktionen f_a auf ihre Definitionsmenge, Symmetrie zum Nullpunkt bzw. zur y-Achse, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte sowie das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und zechnen Sie die Graphen von f_1 und f_{-1} im Intervall [–4; 6] in ein Koordinatenkreuz. (Bei der Untersuchung auf Wendepunkte kann auf das hinreichende Kriterium verzichtet werden.)
   b) Zeigen Sie: Je zwei verschiedene Scharkurven für a_1, $a_2 \in \mathbb{R}^+$ haben zwei gemeinsame Punkte. Geben Sie die zugehörigen Schnittstellen an. Warum gilt die Aussage nicht für beliebige a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$?
   c) Zeigen Sie: $\int \frac{x}{(x-a)^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x-a)^2 - \frac{a}{x-a}$.

      (Verwenden Sie: $\frac{x}{(x-a)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-a)}{(x-a)^2} + \frac{a}{(x-a)^2}$.)
   d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_1 mit der x-Achse und der Geraden zu $x = -4$ einschließt.
3. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_t = \begin{pmatrix} 2+2t \\ -2-t \\ -t^2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_t = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{a}_t$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig?

b) Zeigen Sie: Für die Vektoren $\vec{a}_{-2}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ gilt: $(\vec{a}_{-2}\,\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}_{-2}(\vec{b}\,\vec{c})$.
Stellen Sie eine (notwendige und hinreichende) Bedingung für drei von $\vec{0}$ verschiedene Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ eines beliebigen Vektorraumes auf, so dass gilt: $(\vec{x}\,\vec{y})\,\vec{z} = \vec{x}\,(\vec{y}\,\vec{z})$!

c) Stellen Sie eine Parametergleichung auf für die Ebene *e*, die durch die Punkte *A*, *B* und *C* mit $\vec{a}_{-2} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ festgelegt ist.
Zeigen Sie, dass *e*: $2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0$ eine Koordinatengleichung dieser Ebene ist.

d) Zeigen Sie, dass die Gerade *g*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ parallel zur Ebene *e* ist. Welchen Abstand haben *g* und *e*?

e) Bestimmen Sie eine Gleichung der zur Ebene *e* orthogonalen Gerade *h* durch den Punkt *P*(3|–1|5) und die Koordinaten des Durchstoßpunktes *D* von dieser Geraden *h* mit der Ebene *e*.

Aufgabenstellung: StR H. S.

F.27GK1 — Abitur 2003 – Grundkurs 1

1. a) Gegeben seien die Geraden $g_{r,h}(x) = y = -\frac{r}{h}x + r$, die von den Parametern *r* und *h* abhängen.
Zeichne $g_{2,3}$ in ein Koordinatensystem.
Für $g_{r,h}$ lasse man nun das Geradenstück zwischen dem *y*-Achsenabschnitt und der Nullstelle um die *x*-Achse rotieren.
- Welche Gestalt hat der entstehende Körper?
- Ermittle das Volumen mittels der Integralrechnung für den Körper, der aus $g_{2,3}$ bei der Rotation entsteht.
- Leite für beliebiges *r* und *h* eine Formel für das Volumen der entstehenden Körper mittels der Integralrechnung her!

b) Ein Kreis aus Filterpapier ist zu einem Kegel größten Inhalts zu falten. Gib die Maße des Kegels an, wenn der Radius des Filterpapiers *s* ist.
Hinweis: Das Volumen eines Kegels ist gegeben durch die Formel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, wobei *r* der Radius des Grundkreises und *h* die Höhe des Kegels ist. Mit *s* bezeichnet man üblicherweise die Seitenlinie des Mantels, d. h. eine Strecke von der Spitze zu einem Punkt auf dem Grundkreis des Kegels.
[Hilfsmittel: eine kreisrunde Filterscheibe mit s = 5 cm]

2. a) Gegeben seien drei Punkte *A*(1|2|3), *B*(–2|1|4) und *C*(1|0|1). Bestimme die Ebene E_1, in der diese drei Punkte liegen. Gib für sie

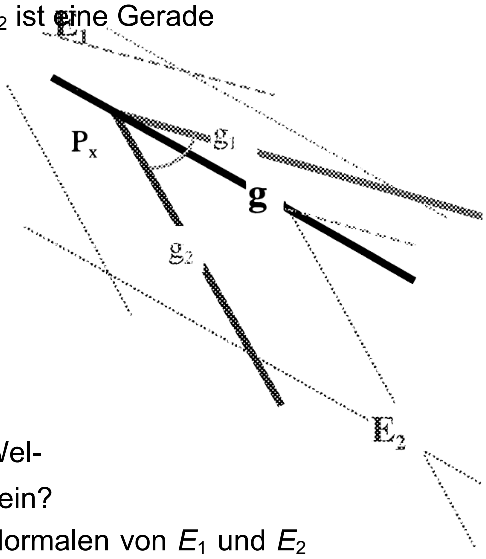
Ebenengleichungen sowohl in der Parameterform (Punkt-Richtungsform) als auch in der Normalenform sowie die Koordinatengleichung an. Bestimme die Spurpunkte der Koordinatenachsen auf E_1 und zeichne mit deren Hilfe die Ebene in ein Koordinatenkreuz ein.

b) Bestimme die Spurpunkte der Ebene E_2:: $2x + 4y + 3z = 5$ und zeichne auch diese Ebene in ein Koordinatenkreuz.
(Es soll dabei durchaus für Teil a) und b) das gleiche Koordinatenkreuz verwendet werden.)

c) Wie liegt die Ebene E_2 zur Ebene E:: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?
Gibt es einen Schnitt der Ebenen?

d) Der Schnitt der Ebenen E_1 und E_2 ist eine Gerade

$$g = E_1 \cap E_2:: \ x = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



Bestimme eine Gerade g_1 durch den Punkt $P_x(2\frac{1}{2}|0|0)$, die in E_1 liegt und senkrecht zur Schnittgerade g verläuft. Ebenso: Bestimme g_2 in E_2 so, dass g_2 senkrecht zu g steht und g in P_x schneidet. Welchen Winkel schließen g_1 und g_2 ein?

e) Bestimme den Winkel, den die Normalen von E_1 und E_2 miteinander einschließen. Vergleiche mit dem Wert des Winkels aus Teil d) und kommentiere das Ergebnis im Zusammenhang der Frage: Wie kann man sinnvoll den Winkel zwischen zwei Ebenen definieren?

Aufgabenstellung: StD Dr. M. L.

F.27GK2 Abitur 2003 – Grundkurs 2

1. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f an!
b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie und Nullstellen!
c) Untersuchen Sie die Funktion f auf Extrempunkte und geben Sie die Monotonieintervalle an!
d) Untersuchen Sie die Funktion f auf Wendepunkte und geben Sie die Krümmungsintervalle an!

e) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Asymptote für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$.

f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *f* im Intervall [–3; 3]. (2 cm ≙ 1 Einheit)
Tragen Sie auch die Asymptoten ein!

g) Es sei $P(x;f(x))$ ein beliebiger Punkt des Graphen von *f* mit $x > 1$. $Q(-x|f(-x))$, $R(-x;0)$ und $S(x;0)$ bilden mit *P* ein Rechteck.
Für welches *x* hat das Rechteck *PQRS* minimalen Flächeninhalt und wie groß ist dieser minimale Flächeninhalt?

2. Gegeben seien die Punkte $A(4;3;0)$, $B(4;5;-3)$, $C(0;9;-6)$ und $D(0;7;-3)$.

a) Zeigen Sie, dass das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm ist!

b) Unter welchem Winkel schneiden sich die Diagonalen des Parallelogramms?

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden *g*, die senkrecht auf dem Parallelogramm steht und durch den Schnittpunkt *S* der Diagonalen geht!

Gegeben sei die Gerade *h* durch die folgende Gleichung:

$$(h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{61}} \\ \frac{6}{\sqrt{61}} \\ \frac{4}{\sqrt{61}} \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R})$$

d) Beschreiben Sie die Lage der Geraden bezüglich des Parallelogramms!
(Tip: Vergleichen Sie *h* mit der in c) bestimmten Geraden *g*.)

Aufgabenstellung: StR G. W.

F.28LK Abitur 2004 – Leistungskurs

1. In einem kartesischen Koordinatensystem sind eine Ebenenschar
$E_t\colon\ (t-4)x - 2y + 6z = 2t,\ t \in \mathbb{R}$
und eine Gerade $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Für welchen Wert von *t* ist E_t parallel zu *g*?

b) Die Ebene E^* verläuft durch den Punkt $P(2|1|11)$ und ist parallel zu E_7. Ermitteln Sie eine Normalengleichung von E^* und zeigen Sie, dass der Abstand von E_7 und E^* 8 beträgt!

c) Die Kugel *K* mit dem Radius $r = 5$ hat ihren Mittelpunkt auf der Geraden *g* und wird von den Ebenen E_7 und E^* in kongruenten Kreisen geschnitten. Bestimmen Sie eine Gleichung von *K*!

d) Die Ebenen T_1 und T_2 sind senkrecht zur *y*-Achse und berühren die Kugel *K*: $(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix})^2 = 25$.

Ermitteln Sie die Gleichungen von T_1 und T_2!

e) Es gibt genau eine Ebene aus der Ebenenschar E_t, die auf keiner anderen Ebene der Schar senkrecht steht. Wie heißt ihre Gleichung?

2. Gegeben sei die Funktion *f* mit $f(x) = x \cdot (\ln x)^2$.

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion bei Annäherung an 0!

b) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte des Funktionsgraphen *G*(*f*).

c) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen im Intervall [0; 3].
(1 Einheit ≙ 5 cm)

d) Beweisen Sie mittels partieller Integration, dass gilt:
$\int x \cdot (\ln x)^2 dx = 0{,}5 \cdot x^2 \cdot (\ln x)^2 - 0{,}5 \cdot x^2 \cdot \ln x + 0{,}25 \cdot x^2$

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die vom Funktionsgraphen, der Geraden $x = \frac{1}{e^2}$ und der x-Achse begrenzt wird.

3. Gegeben sei die Funktion *f* mit $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion im Hinblick auf Symmetrie, Definitionsbereich und Art der Definitionslücken und bestimmen Sie die Nullstellen des Funktionsgraphen!

b) Bestimmen Sie Extrem- und Sattelpunkte des Funktionsgraphen mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums!

c) Geben Sie die Gleichung der Asymptoten des Funktionsgraphen an!

d) Tragen Sie die Nullstellen, Extrem- und Sattelpunkte sowie die Asymptoten in ein Koordinatensystem ein und skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Funktionsgraphen!

e) Der Graph *G*(*f*) hat einen Hochpunkt *H* bei $x = -\sqrt{12}$, einen Tiefpunkt *T* bei $x = \sqrt{12}$ und einen Wendepunkt *W* bei $x = 0$. Bestimmen Sie die Gleichung desjenigen Polynoms 3. Grades $y = g(x)$, das in *T* einen Hochpunkt, in *H* einen Tiefpunkt und in *W* ebenfalls einen Wendepunkt hat! Skizzieren Sie den Graphen *G*(*g*) in das vorhandene Koordinatensystem!

f) Berechnen Sie den Flächeninhalt, den der Graph der Funktion *g* mit $g(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{4}x$ mit der Asymptoten, die die Gleichung von $y = x$ hat, einschließt!

Aufgabenstellung: StR G. W.

F.28GK1 Abitur 2004 – Grundkurs 1

1. Gegeben seien die Geraden

   g_1 durch den Punkt $P(0{,}5|0{,}5|0)$ und die Richtung $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

   g_2 durch den Punkt $Q(0|-1|0)$ und die Richtung $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   a) Zeige, dass g_1 und g_2 windschief zueinander sind. Bestimme die Spuren der Geraden in den Koordinatenebenen. Zeichne beide Geraden in ein Koordinatensystem.

   Abstandsbestimmung mit unterschiedlichen Methoden:

   b) i) Gib die Gleichung der folgenden Ebenen E_{12} in der Hesse-Form an: g_2 soll in dieser Ebene liegen und g_1 soll parallel zu E_{12} verlaufen.

   ii) Bestimme den Abstand zwischen der Ebene E_{12} und der Gerade g_1.

   c) i) Beschreibe die Richtungsvektoren u_{PQ} der Geraden h_{PQ}, die einen Punkt P auf g_1 mit einem Punkt Q auf g_2 verbinden.

   ii) Zeige: Es gibt unter diesen Geraden h_{PQ} (mindestens) eine Gerade h, die sowohl auf g_1 als auch auf g_2 senkrecht steht.

   iii) Welche Schnittpunkte haben die Geraden? Wie weit liegen die Schnittpunkte auseinander? Wie groß ist somit der „Abstand“ zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2?

   Zur Kontrolle:

   d) i) Zeige, dass sich g_1 und die folgende Gerade n schneiden: Die Gerade n soll den Stützpunkt $S(0\,|-\frac{1}{3}\,|-\frac{2}{3})$ und die Richtung der Normalen von E:: $x + y + z + 1 = 0$ haben.

   ii) Wie weit liegen der Stützpunkt S und der Schnittpunkt von g_1 und n auseinander? Zeichne die Gerade n in das Schaubild (Teil a) ein.

   iii) Welche Lage haben n und g_1 zu der Ebene F:: $x + y - 2z = 1$? Bestimmen Sie den Schnitt der Ebene F mit der Gerade g_2.

2. Die Funktionenschar mit den Termen $f_p(x) = x^4 - 2x^2 + p$, $p \in \mathbb{R}$ soll untersucht werden:

   a) Fertige eine Kurvendiskussion für f_1 (also p = 1) an. Zeichne den Graphen im Bereich [–2; 2]. *)

   b) Welche Bedeutung hat der Parameter „p“ für die Graphen der Funktionen f_p? Erläutere die Bedeutung kurz und zeichne die Graphen für p = 0 und p = 0,5 in das Schaubild (Aufg.teil a)) ein.

c) Bestimme den Parameterwert *p*, d. h. die Funktion aus der Schar, für den das folgende Integral den Wert 0 annimmt: $\int_{-1}^{1} f_p(x)\,dx = 0$.

(Für das Folgende seien die beiden Wendestellen von f_p, beliebiges *p*, gegeben: $\pm\sqrt{3}$)

d) Gib die Gleichungen der Wendetangenten von f_p an.

e) Für $p = 1$: Bestimme eine Parabel (2. Grades), die die Kurve von f_1 in den Wendepunkten von f_1 berührt, dort also insbesondere die gleichen Steigungen wie f_1 hat.

* Zur Erinnerung: Eine Kurvendiskussion umfaßt die begründete (Kriterien anwenden) Bestimmung folgender Punkte: Bestimmung der Ableitungen in ihren Linearfaktorzerlegungen, Definitionsmenge, asymptotisches Verhalten, Symmetrie, *y*-Achsenabschnitt, Nullstellen, Steigungsverhalten und Extrempunkte, Krümmungsverhalten und Wendepunkte, gegebenenfalls unterstützende Wertetabelle, Graph der Funktion.

Aufgabenstellung: StD Dr. M. L.

F.28GK2 — Abitur 2004 – Grundkurs 2

1. Für jedes $a \in \mathbb{R}^{>0}$ ist eine Funktion f_a gegeben durch
   $f_a(x) = \frac{1}{a}x^3 + 2x^2 + ax$ mit $x \in \mathbb{R}$.
   a) Untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Schnittpunkte mit der *x*-Achse, Extrem- und Wendepunkte! Zeichnen Sie den Graphen von f_3 im Intervall [–4; 0,5] (Längeneinheit 2 cm)!
   b) Berechnen Sie die Steigung der Wendetangente. Für welches *a* ist die Senkrechte zur Wendetangente durch den Punkt $W(-\frac{2}{3}a \mid -\frac{2}{27}a^2)$ eine Ursprungsgerade?
   c) Der Graph zu f_4 schließt mit der *x*-Achse ein Flächenstück ein, dem ein rechtwinkliges Dreieck derart einbeschrieben werden soll, daß eine Kathete auf der *x*-Achse liegt und der Ursprung sowie ein Punkt auf dem Graphen die Endpunkte der Hypotenuse bilden. Welches dieser Dreiecke hat maximalen Flächeninhalt?
   d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f_1 und f_4!
2. Gegeben sind die Punkte *A*(2|–5|1,5), *B*(2|0|4) und *C*(0|–4|4) sowie die Ebenenschar E_k: $2x_1 - x_2 - kx_3 = 12$, $k \in \mathbb{R}$.
   a) Durch die Punkte *A*, *B* und *C* wird eine Ebene *E* festgelegt. Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung und eine Koordinatenform von *E*. Für welches *k* sind *E* und E_k identisch?
   (Teilergebnis: *E*: $4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 24$)

b) Zeigen Sie, daß das Dreieck *ABC* rechtwinklig ist. Berechnen Sie die Seitenlängen, die fehlenden Winkel und den Flächeninhalt *F* dieses Dreiecks.
(Teilergebnis: $F = 7{,}5$ FE)

c) Die Gerade *h* schneidet die Ebene *E* im Punkt *C* senkrecht. Geben Sie eine Parameterdarstellung von *h* an. Ermitteln Sie den Durchstoßpunkt *D* von *h* und der Ebene E_k mit $k = -0{,}5$.
(Teilergebnis: $D(2|-5|6)$)

d) Welches Volumen V_P hat die Pyramide mit dem Dreieck *ABC* als Grundfläche und der Spitze *D*?

e) Bestimmen Sie die Schnittgerade von zwei beliebigen Ebenen der Ebenenschar E_k. Zeigen Sie, dass alle Ebenen der Ebenenschar diese Schnittgerade haben.

Aufgabenstellung: StR B. W.

F.29LK Abitur 2005 – Leistungskurs

1. Für jedes $a > 0$ ist durch $f_a(x) = (x-a)\cdot e^{2-\frac{x}{a}}$; $x \in \mathbb{R}$ eine Funktion f_a gegeben.
   a) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte sowie die Extrem- und Wendepunkte von f_a.
   b) Zeichnen Sie die Graphen zu f_1 und f_2 im Intervall [0; 10] in ein Koordinatensystem (1 LE = 1 cm).
   c) Bestätigen Sie folgende Eigenschaften der Scharkurven:
      1) Alle Kurven schneiden die *x*-Achse unter dem gleichen Winkel. Berechnen Sie diesen Winkel.
      Hinweis: *a* ist einzige Nullstelle von f_a.
      2) Alle Extrempunkte liegen auf einer Ursprungsgeraden. Bestimmen Sie deren Gleichung und zeichnen Sie sie in das vorhandene Koordinatensystem. Hinweis: $H_a(2a|a)$ ist Hochpunkt von f_a.
      3) Alle Wendetangenten sind parallel. Hinweis: $W_a(3a\,|\,\frac{2a}{e})$ ist Wendepunkt von f_a.
   d) Die ins Unendliche reichende Fläche zwischen f_a und der *x*-Achse hat einen endlichen Flächeninhalt. Berechnen Sie diesen.
2. Durch die Punkte $A(0|0|0)$, $B(0|0|8)$, $C(5|-2|8)$, $D(5|-2|0)$ und $S(6{,}5|9|4)$ ist eine Pyramide *ABCDS* mit der Grundfläche *ABCD* und der Spitze *S* gegeben.
   a) Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem.
   b) Beweisen Sie, dass die Grundfläche der Pyramide rechteckig ist und dass die Höhe die Grundfläche im Mittelpunkt *F* des Rechtecks schneidet. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

c) Um wieviel Grad ist die Seitenfläche *ABS* der Pyramide zur Grundfläche *ABCD* geneigt?

d) Zeigen Sie, dass die Ebene *E*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$ parallel zur Grundfläche *ABCD* der Pyramide liegt und bestimmen Sie den Abstand der beiden Ebenen.

e) Durch die Ebene E wird sozusagen der obere Teil der gegebenen Pyramide abgeschnitten. Dabei entsteht ein Pyramidenstumpf. Wie groß ist dessen Volumen? Hinweis: $\text{Abst}(E, E_{ABCD}) = \frac{2}{\sqrt{29}}$.

3. In einer Urne befinden sich 10000 Kugeln. Man vermutet, dass 10 % von ihnen weiße, der Rest schwarze Kugeln sind. Der Urne werden 100 Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Sollten weniger als 5 und mehr als 15 Kugeln weiß sein, so entschließt man sich, von der Vermutung $p = 10\ \%$ abzugehen.

   a) Berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit bei dieser Entscheidungsregel.

   b) Geben Sie eine obere Schranke für diese Irrtumswahrscheinlichkeit mit Hilfe der Tschebyschew-Ungleichung an und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis aus Teil a). Hinweis: Ergebnis aus Teil a) = 6,36 %.

   c) Wie muss man die Entscheidungsregel ändern, damit die Irrtumswahrscheinlichkeit möglichst nah bei 5 % liegt? Probieren Sie! Welche Regel scheint demnach als sinnvoll?

   d) Eine andere Entscheidungsregel lautet wie folgt:
   Man ziehe 10 Kugeln mit Zurücklegen. Kommt in dieser Stichprobe höchstens eine weiße Kugel vor, so nimmt man die Hypothese $p = 10\ \%$ an, sind mehr als zwei Kugeln weiß, so lehnt man die Hypothese ab. Sind genau zwei Kugeln weiß, so zieht man ein zweites Mal 10 Kugeln mit Zurücklegen und nimmt die Hypothese nur dann an, wenn in dieser Stichprobe keine weiße Kugel mehr vorkommt. Geben Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit bei dieser Entscheidungsregel an und bewerten Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabenstellung: StD Dr. W. S.

F.29GK1 — Abitur 2005 – Grundkurs 1

1. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte *A*(4|2|0), *B*(3|5|2) und *C*(6|–2|1) und die Gerade *g* gegeben,

   g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$, $a, b, r \in \mathbb{R}$.

   a) Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene *E* durch die Punkte *A*, *B* und *C* auf. Ermitteln Sie zudem eine Koordinatenform von *E*.

Der Punkt Q liegt in der Ebene E und hat drei gleiche Koordinaten. Berechnen Sie den Wert dieser drei Koordinaten.

(Mögliches Teilergebnis: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$)

b) Berechnen Sie die Länge des Stützvektors der Ebene E (siehe obiges Teilergebnis) und jeweils den Winkel zwischen dem Stützvektor und der x_2- bzw. x_3-Achse.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h, die senkrecht auf der Ebene E steht und durch den Punkt $P(5|0|3)$ geht. Wie lautet die Punkt-Normalenform einer zur Ebene E parallelen Ebene F durch den Punkt P und deren Koordinatenform?

d) Bestimmen Sie die Werte von a und b so, dass gilt:
   (1) g liegt in E,
   (2) E und g sind zueinander parallel, g liegt nicht in E und
   (3) E und g haben genau einen Schnittpunkt.

2. Gegeben ist eine Funktionenschar f_a mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}^+$:

$f_a(x) = \frac{x}{8} \cdot (x-a)^2$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f_6 ($a = 6$) auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graphen von f_6 im Intervall [–0,5; 8,5].

b) Bestimmen Sie für den Graphen von f_a die Koordinaten der Extrempunkte und auch die Koordinaten des Wendepunktes in Abhängigkeit von dem Parameter a. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil a).

c) Für welchen Parameter a hat der Graph von f_a im Wendepunkt $W(\frac{2a}{3} \mid \frac{a^3}{108})$ die Steigung $m = -\frac{2}{3}$?

d) Bestimmen Sie die Fläche, die der Graph von f_a mit der x-Achse einschließt.
   Für welches $a \in \mathbb{R}^+$ ergibt sich der Flächeninhalt 13,5 FE?

Aufgabenstellung: OStR Dr. E. W.

F.29GK2 — Abitur 2005 – Grundkurs 2

1. Gegeben sei die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + x$.

a) Bestimmen Sie für die Funktion f die Nullstellen, die Extrempunkte und den Wendepunkt.

b) Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche im ersten Quadranten, die vom Funktionsgraphen und der x-Achse begrenzt wird.

c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall [–5; 5].

d) Zeigen sie, dass $g(x) = -\frac{1}{4}x_0^2 \cdot x + x + \frac{1}{6}x_0^3$ die Funktionsgleichung der Tangente an den Graphen von *f* im Punkt $P(x_0|f(x_0))$ ist.

e) Diese Tangente *g* schneidet den Graphen von *f* in einem weiteren Punkt $S(x_s|f(x_s))$. Zeigen Sie, dass gilt: $x_s = -2x_0$.

2. Gegeben sind die Punkte *A*(8|0|8) und *B*(10|3|10) sowie die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Durch *A* und *B* ist die Gerade *g* bestimmt. Wie lautet ihre Gleichung?

b) Weisen Sie nach, dass *g* und *h* windschief sind.

(Ergebnis: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$)

c) Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf *g* und *h* steht.

d) Stellen Sie eine Normalengleichung der Ebene *E* auf, in der die Gerade *g* liegt und die parallel zur Geraden *h* verläuft.
(Ergebnis: E: $2x - 2y + z = 24$)

e) Berechnen Sie den Abstand der Geraden *h* von der Ebene *E*.

f) Zeigen Sie, dass die Ebene *E* auf der Ebene T: $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ senkrecht steht.

Aufgabenstellung: StR G. W.

F.30LK — Abitur 2006 – Leistungskurs

1. Gegeben sei die Funktion *f* mit $f(x) = x \cdot (\ln x)^2$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion an und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für $x \to 0$.

b) Bestimmen Sie die Nullpunkte, Extrempunkte und Wendepunkte des Funktionsgraphen *G*(*f*). Zeichnen Sie anschließend den Graphen im Intervall von 0 bis 3 (1 Einheit entspricht 5 cm).

c) Beweisen Sie mittels partieller Integration, dass gilt:
$\int x \cdot (\ln x)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (\ln x)^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \ln x + \frac{1}{4} \cdot x^2$

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion *f*(*x*), der Geraden $x = \frac{1}{e^2}$ und der *x*-Achse begrenzt wird.

2. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck durch die Eckpunkte *A*(1|7|–2), *B*(1|2,5|2,5) und *C*(–0,5|1|–3,5) und seinen Schwerpunkt *S*(0,5|3,5|–1).

a) Stellen Sie eine Koordinatengleichung auf für die Ebene *E* durch die drei Punkte *A*, *B* und *C*.

b) Der Punkt A soll parallel zum Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von E in die x_1-x_2-Ebene projiziert werden. Bestimmen Sie dazu den Schnittpunkt A' der zu E orthogonalen Geraden g durch A mit der x_1-x_2-Ebene.

c) Bestimmen Sie für diese Projektion die Koordinaten des Bildpunktes P' eines beliebigen Punktes $P(p_1/p_2/p_3)$ aus E und geben Sie eine zugehörige Abbildungsmatrix an.
Leiten Sie für einen beliebigen Punkt $P(p_1/p_2/p_3)$ die Abbildungsmatrix einer Parallelprojektion in die x_1-x_2-Ebene parallel zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ her.

d) Die Projektion parallel zum Normalenvektor aus Teil b) hat die Abbildungsmatrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Bildpunkte von A, B, C und S.
Untersuchen Sie, ob das Bilddreieck $A'B'C'$ ebenfalls gleichseitig ist und ob S' der Schwerpunkt des Dreiecks $A'B'C'$ ist.

3. Ein Golfball eines bestimmten Herstellers wird von den Spielern mit einer Wahrscheinlichkeit von 8% als unbrauchbar eingestuft.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Schachtel mit 12 Bällen mindestens 10 brauchbare Bälle sind?

b) In einer Schachtel mit 12 Golfbällen befinden sich drei unbrauchbare Bälle. Ein Spieler greift zufällig vier Bälle aus dieser Schachtel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür,
   i) dass er dabei nur brauchbare Bälle entnimmt?
   ii) dass er dabei höchstens einen unbrauchbaren Ball entnimmt?

c) Vor einem großen Golfturnier werden die vom Hersteller gelieferten Bälle kontrolliert. Dabei werden 4% der brauchbaren und 97% der unbrauchbaren Bälle aussortiert.
   i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei dieser Kontrolle ein Ball richtig beurteilt?
   ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein aussortierter Ball unbrauchbar?

d) Ein Abnehmer von Golfbällen vermutet, dass der Anteil der unbrauchbaren Bälle über 8% gestiegen ist. Um diese Vermutung zu testen, untersucht er 500 Bälle. Ab welcher möglichst klein gewählten Anzahl unbrauchbarer Bälle kann er seine Vermutung annehmen, wenn er dabei eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% in Kauf nehmen will?

e) Erfahrungsgemäß werden im Mittel 5% der vom Hersteller ausgelieferten Bälle aufgrund von Mängeln zurückgegeben. Für jeden zurückge-

gebenen Ball entsteht dem Hersteller ein Verlust von 0,80 Euro, für jeden nicht zurückgegebenen Ball ein Gewinn von 1,20 Euro. Der Hersteller möchte mit einer Lieferung von 200 Bällen einen Gesamtgewinn von mindestens 210 Euro erzielen.
Wie viel Prozent der Bälle müssen mindestens beim Kunden verbleiben? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt der Hersteller einen Gesamtgewinn von mindestens 210 Euro?

Aufgabenstellung: OStR Dr. E. W.

F.30GK1 — Abitur 2006 – Grundkurs 1

1. Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit der Gleichung:
   $f_t(x) = \frac{1}{6t}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}tx$; $t > 0$.
   a) Untersuchen Sie die Funktionenschar auf Symmetrie- und Nullstellen.
   b) Bestimmen Sie die Extrempunkte dieser Funktionenschar.
   c) Bestimmen Sie die Wendepunkte dieser Funktionenschar.
   d) Bestimmen Sie für $t = 3$ die Gleichungen der Wendetangente sowie der Geraden g, die durch Wendepunkt und Ursprung verläuft.
   e) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f_3 im Intervall [0; 12]. Zeichnen Sie zusätzlich die Wendetangente und die Verbindungsgerade g ein.

   Die y-Achse, die Wendetangente und die Gerade g bilden ein Dreieck, das durch den Funktionsgraphen von f_3 in zwei Teilflächen zerlegt wird. Markieren Sie diese beiden Teilflächen und nennen Sie diese A_1 und A_2.
   f) Berechnen Sie die Flächeninhalte von A_1 und A_2.
   g) Bestimmen Sie für allgemeines t die Gleichung der Wendetangente und der Verbindungsgeraden g. Zeigen Sie für allgemeines t, dass das Dreieck, das durch y-Achse, Wendetangente und Verbindungsgerade g gebildet wird, durch den Graphen von f_t in zwei Flächen gleichen Inhalts zerlegt wird.
2. Gegeben sei die Ebene E: $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$.
   a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte A, B und C von E mit den Koordinatenachsen. Tragen Sie diese auf dem beigefügten Zeichenblatt [dieses enthält drei gleichartige Koordinatenkreuze auf kariertem Papier] in das Koordinatensystem 1 ein und veranschaulichen Sie die Ebene durch Einzeichnen der Spurgeraden.
   b) Die Punkte O, A, B und C bilden einen Tetraeder. Schraffieren Sie die Seitenflächen OAB, OAC und OBC des Tetraeders, die in den Ebenen E_1: $x_1 = 0$; E_2: $x_2 = 0$ und E_3: $x_3 = 0$ liegen, mit verschiedenen Farben.

c) Zeichnen Sie auf dem beigefügten Zeichenblatt in das Koordinatensystem 2 das Tetraeder *OA'B'C'* ein, das durch Drehung des Tetraeders *OABC* aus b) um die x_1-Achse mit dem Drehwinkel $\alpha = 90°$ entsteht.
Schraffieren Sie auch hier die Seitenflächen *OA'B'*, *OA'C'* und *OB'C'* des Tetraeders in den entsprechenden Farben wie in b), so dass die Drehung des Tetraeders bzw. seiner einzelnen Seitenflächen deutlich wird.

d) Begründen Sie, warum die Drehung in c) durch die Matrix $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben werden kann.

e) Berechnen Sie mit der Matrix D_1 aus d) die Bildpunkte *A'*, *B'* und *C'* des gedrehten Tetraeders und vergleichen Sie diese mit der von Ihnen in c) ermittelten Figur *OA'B'C'*.
(Zwischenergebnis: *A'*(6|0|0); *B'*(0|0|4); *C'*(0|3|0))

f) Zeigen Sie, dass die Matrix $D_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ eine Drehung um die x_1-Achse mit $\alpha = -90°$ darstellt.

g) Zeigen Sie, dass mit der Matrix $D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine Drehung des Tetraeders *OABC* um die x_2-Achse mit dem Drehwinkel $\beta = -90°$ erzeugt wird.
Zeichnen Sie das gedrehte Tetraeder *OA''B''C''* in das Koordinatensystem 3 vom Zeichenblatt ein und schraffieren Sie entsprechende Seitenflächen wie in 1a) bzw. 1b).

h) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix *A*, die das Tetraeder *OA'B'C'* auf das Tetraeder *OA''B''C''* abbildet.

Aufgabenstellung: L.i.A. T. W.

F.30GK2 Abitur 2006 – Grundkurs 2

1. Gegeben sind die Punkte *A*(1|4|2), *B*(1|5|0) und *C*(4|4|4), sowie eine Schar von Ebenen E_k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} k+16 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}$.

a) Die Punkte *A*, *B* und *C* liegen in einer Ebene *E*. Geben Sie eine Parameterform und eine Koordinatenform der Ebenengleichung von *E* an. (Teilergebnis: *E*: $-2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 28$)

Berechnen Sie den Winkel zwischen $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor von *E*. Was folgt daraus für den Schnitt von *E* mit einer Ebene der Schar E_k?

Für welches *k* sind *E* und E_k identisch?

b) Für welchen Wert von *k* erhält man die Ebene $6x_1 - 23x_2 - 14x_3 + 104 = 0$?

(Teilergebnis: *k* = 7)

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden *s* der Ebenen *E* und E_7. Zeigen Sie, dass die Gerade *g*: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 23 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Ebene E_7 liegt und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes *S* der Geraden *s* und *g*.

d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(2a|3a|7)$ von der Ebene *E* und diskutieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Lage des Punktes *P* zur Ebene und zum Ursprung!

2. Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch $f_a(x) = -\frac{1}{4}ax^3 + (a+2)x$; $a \in \mathbb{R}$.

a) Für $a = \frac{2}{3}$ ergibt sich: $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{3}x$.

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion *f* auf Symmetrie, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte. Fertigen Sie eine Zeichnung des Graphen im Intervall [–5; 5] an (Längeneinheit = 1 cm).

(Teilergebnis: Nullstellen: –4; 0; 4)

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von *f* mit der *x*-Achse einschließt.

c) Zeigen Sie: Für $a \in [-2; 0]$ hat der Graph der Funktion f_a keine Extrema.

d) Untersuchen Sie die Graphen zweier verschiedener Funktionen f_r und f_s ($r \neq s$) der Schar auf gemeinsame Punkte.

e) Zeigen Sie: Keine Funktion der Schar kann genau zwei Nullstellen haben.

Aufgabenstellung: StR B. W.

Wiederverwendete Aufgaben:

E.20f (2)	=	E.25p (1)				
E.21f (1)	=	F.1GK (3)				
F.1GK (1)	=	F.19GK2 (2)				
F.2LK (3)	=	F.8LK (3)				
F.3LK (1)	=	F.12LK2 (1)				
F.3LK (2)	=	[F.8GK (2)]	=	[F.15GK1 (2)]		
F.3LK (3)	=	F.12LK2 (3)				
F.4LK (2)	=	F.26LK (3)	=	F.29LK (3)		
F.6GK (1)	=	F.11GK1 (1)	=	F.12GK2 (1)		
F.8GK (2)	=	F.15GK1 (2)				
F.9LK (3)	=	F.14LK (1)	=	F.29LK (1)		
F.9GK (1)	=	[F.16LK (1)]				
F.9GK (2)	=	F.14GK1 (2)	=	F.20GK2 (2)		
F.10LK (1)	=	F.17LK (1)	=	F.24LK (1)	=	[F.27LK (1)]
F.10LK (2)	=	F.17LK (2)	=	F.27LK (3)		
F.10LK (3)	=	F.17LK (3)				
F.12LK1 (1)	=	F.20LK (1)				
F.12LK1 (2)	=	F.20LK (2)				
F.12LK1 (3)	=	F.20LK (3)				
F.13LK (1)	=	F.19LK (1)				
F.13LK (2)	=	F.19LK (2)	=	F.26LK (2)		
F.13LK (3)	=	F.19LK (3)				
F.13GK2 (1)	=	F.18GK1 (1)	=	E26GK1 (1)		
F.13GK3 (2)	=	F.22LK (3)				
F.14GK1 (1)	=	F.20GK2 (1)	=	F.28GK1 (2)		
F.14GK2 (1)	=	F.23GK (1)				
F.14GK2 (2)	=	F.23GK (2)	=	F.30GK2 (1)		
F.14GK3 (2)	=	F.21GK (2)				
F.15LK (2)	=	F.28LK (3)				
F.15LK (3)	=	F.28LK (1)				
F.15GK2 (2)	=	F.19GK2 (1)				
F.16GK2 (1)	=	F.21GK (1)				
F.20GK1 (1)	=	F.25GK1 (1)				
F.20GK1 (2)	=	F.25GK1 (2)				
F.21LK (1)	=	F.29LK (2)				
F.21LK (3)	=	F.28LK (2)	=	F.30LK (1)		
F.22GK1 (1)	=	F.28GK2 (1)				
F.24GK (1)	=	F.29GK1 (2)				
F.24GK (2)	=	F.29GK1 (1)				

Anhang

Material 1
Bemerkungen zu Abiturarbeit E.4 (1952)

Allgemeine Bemerkung zu den mathematischen Arbeiten der OI Ostern 1952.
Der Ausfall der Arbeiten entspricht dem Leistungsstand der Klasse, der rechnerisch ermittelte Durchschnitt der Urteile über die schriftlichen Arbeiten stimmt mit dem der Vorzensuren fast genau überein. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben wurde mit Rücksicht auf die Examensaufregung etwas geringer gewählt als bei den Klassenarbeiten; als Folge wäre mit diesen Aufgaben ein etwas besseres Ergebnis zu erwarten gewesen.
Im einzelnen weichen die Ergebnisse in vielen Fällen von der „Vorzensuren" nach oben und unten ab. Das ist z. T. dadurch zu erklären, daß die Vorzensur nach den Vorschriften den Durchschnitt der Primazensuren und nicht den letzten Leistungsstand wiedergibt, und dann vor allem auch durch den Umstand, daß die Mehrzahl der Abiturientinnen nur kurze Zeit unsere Anstalt besucht und eine unsichere und in den einzelnen Gebieten der Mathematik sehr unterschiedliche Vorbildung hat. Die meisten sind Flüchtlinge, die durch sehr häufigen Schulwechsel und -ausfall auch von der Mittelschule her Lücken haben, die sich bis in die oberen Klassen hinein auswirken. Es ist charakteristisch, daß bei den vier Abiturientinnen, die von der Sexta an unsere Anstalt besuchten entweder […] das Urteil der Arbeit mit der Vorzensur übereinstimmt oder aber […] um eine Stufe nach oben abweicht, wie es schon bei der letzten Klassenleistung der Fall war. – Aus der unsicheren Beherrschung der Grundlagen neben der aus Mangel an Zeit fehlenden Übung ist auch die Tatsache zu erklären, daß, abgesehen von Schulz und Wolf, deren Leistungen in der Prima schon immer mangelhaft waren, keine bei der Lösung einer Aufgabe vollkommen versagte, sondern immer nur Einzelheiten falsch sind und fast nur leichte Fehler vorkommen.
Die zwei häufig wiederkehrenden Fehler – die ungenaue Zeichnung der Funktionskurven und das nicht genügend weit durchgeführte Newtonsche Näherungsverfahren – erklären sich aus dem Mangel an Zeit für eine ausreichende Übung. Der vorliegende besondere Fall des Verlaufs der Funktionskurve dritten Grades kam im Unterricht nie vor, und das Newtonsche Näherungsverfahren wurde vor längerer Zeit nur an einem einzigen Beispiel durchgeführt.
Grundel. O.St.R.

Quelle: Schularchiv Stift Keppel: Akte „Reifeprüfung Ostern 1952 – Mathematische Arbeiten".

Material 2
Bemerkungen zu Abiturarbeit E.18 (1966)

Beschreibung des Zusammenhangs der für die Reifeprüfung Ostern 1966 vorgeschlagenen Aufgaben mit dem Unterricht.

1) Das Verfahren der Kurvendiskussion bei ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen ist im Unterricht behandelt worden. Auch die Methode der unbestimmten Koeffizienten wurde an einigen Beispielen durchgeführt.
2) In der analytischen Geometrie wurde die Ellipse als affines Bild des Kreises eingeführt. Der Begriff „konjugierte Durchmesser“ ist den Schülerinnen bekannt. Dagegen wurde der Krümmungskreis nicht behandelt.
3) Die Gruppenaxiome wurden für affine Abbildungen, Zahlen (positive rationale Zahlen bei der Multiplikation, ganze Zahlen bei der Addition, komplexe Zahlen bei Addition und Multiplikation) und Permutationen nachgewiesen. Am Beispiel des regelmäßigen Sechsecks ist im Unterricht der Zusammenhang zwischen Drehungen und Permutationen dargestellt worden.“

Quelle: Schularchiv Stift Keppel: Akte „Reifeprüfung Ostern 1966“

Material 3
Bemerkungen zu Abiturarbeit F.18LK (1994)

<u>1. Aufgabe</u>

a) Untersuchungen von Funktionen (auch von abschnittsweise definierten) sind den Schülern aus 12/1 bekannt. Der Begriff der Stetigkeit einer Funktion wurde in 11/2 eingeführt, in 12/1 aber mehrfach vertieft. Für das Verhalten für $x \to \pm\infty$ wird die l’Hospitalsche Regel zur Verfügung stehen (13/2) (AB I und II).
b) Dieser Teil bezieht sich auch auf 12/1. Schwierigkeiten könnte das Auffinden des Wendepunktes an der Nahtstelle $x = 1$ bereiten, der nicht mit Hilfe der Ableitungen bestimmbar ist (AB I und II).
c) Hier muß das Verfahren der partiellen Integration (12/1) eingesetzt werden. Uneigentliche Integrale sollen noch in 13/2 behandelt werden. Dieser Aufgabenteil ist dem AB II zuzuordnen.
d) Eine solche allgemeine Formel wurde im Unterricht nicht aufgestellt. Die meisten Schüler werden erkennen, daß der Beweis durch vollständige Induktion geführt werden kann. Beweise durch vollständige Induktion sind in 11/2 und 12/1 mehrfach durchgeführt worden (z. B. Berechnung von Unter- und Obersummen / bestimmtes Integral). In diesem Aufgabenteil müssen aber Kenntnisse und Überlegungen in einen neuen Zusammenhang gebracht werden (AB II und III).

<u>2. Aufgabe</u>

a) Die aus 13/1 bekannten Verfahren (Schnittpunkts- und Winkelberechnungen, Bestimmung von Bildgeraden in den Koordinatenebenen) sind überwiegend dem AB I zuzurechnen. Die Bestimmung des Schnittpunktes S ist in diesem Aufgabenteil aber etwas schwieriger, weil die Parameterform der Gleichung von g selbständig aus der Plückerform erarbeitet werden muß. Solche Umformungen wurden im Unterricht nicht ausgeführt (AB II).

b) Dieser Aufgabenteil erfordert einen eigenen Ansatz. Hier müssen Kenntnisse und Vorstellungsvermögen in den richtigen Zusammenhang gebracht werden, um einen möglichst kurzen Lösungsweg zu finden. Eine Gleichung wie $x_2 = 2x_1 + 11$ wurde im Unterricht nicht als Gleichung einer „projizierten Ebene“ gedeutet (AB II).

c) Die angegebene Tangentenbedingung ist den Schülern unbekannt. Sie müssen den Sachverhalt richtig verstehen (AB II). Die Ermittlung der Kreisgleichung ist dann überwiegend dem AB I zuzuordnen, da die Bestimmung der Parameterform aus der Koordinatengleichung von g_1 und das Lösen der Gleichung leicht sind.

d) Diesen Teil rechne ich zu einem großen Teil dem AB III zu, weil für einen solchen Beweis eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind. Der Schnitt eines Kreises mit einer Geraden ist den Schülern aus 13/1 bekannt. Der allgemeine Ansatz und die weitere Durchführung (verallgemeinerte Darstellung, Untersuchung des Radikanden) werden aber einige Schwierigkeiten bereiten.

<u>3. Aufgabe</u>

a) Funktionenscharen und die Regel von l’Hospital sollen noch in 13/2 behandelt werden (AB I und II). Die Beschreibung des Graphenverlaufs mit Hilfe der Grenzwertbetrachtung $\lim\limits_{x\to\infty} f_a$ oder eines hinreichenden Kriteriums für Wendestellen wird wahrscheinlich einige Schwierigkeiten bereiten (AB II bis III).

b) Die Flächenberechnung (12/1) und die Ergebnisdiskussion rechne ich dem AB II zu.

c) Der Ansatz $g(x_s) = f_a(x_s)$ ist einfach (AB I), die Lösung dieser allgemeinen Gleichung schon schwieriger. Näherungsverfahren sind den Schülern nicht bekannt. Sie müssen selbständig erkennen, welche Bedeutung die Gleichung $1 = x_s \cdot \ln x_s$, die aus dem Ansatz folgt, hat und wie man zu einer Lösung kommen kann. Eine Angabe des Näherungswertes selbst ist im Sinne der Frage nicht erforderlich (AB II und III).

Quelle: Schularchiv Stift Keppel: Akte „Abitur 1994. Vorschläge“

Material 4
Ursprüngliche Fassung der 2. Aufgabe aus E.17GK2 (1993)

2. Im folgenden soll untersucht werden, wo eine Kugel liegen bleiben würde, die „auf einer solchen Kurve abrollt“, wie sie in Aufgabe 1 erarbeitet ist.

Die Wendepunkte und die Steigung der Kurve von Aufg. 1 sind wie folgt, wenn man sie in den Raum einbettet:

Wendepunkte: $(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\,|-\frac{1}{2}\,|\,0)$ und $(\frac{1}{3}\sqrt{3}\,|-\frac{1}{2}\,|\,0)$

(x/y-)Steigung dort: $-\frac{3}{4}\sqrt{3}$ bzw. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

Zur Konkretisierung sei folgende Aufschlüsselung gegeben, wobei die Kugel einfachheitshalber auf den Tangentialebenen zu den Wendepunkten abrollen soll:

a) Bestimmen Sie die beiden Ebenen E_1, E_2 in der Hesseschen Normalenform, in denen die Wendetangenten (wie oben festgelegt) liegen, und deren Schnittgerade parallel zur z-Achse verläuft.

b) Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die Lage der Ebenen im Raum erkennbar wird. (Dabei soll die z-Achse ausnahmsweise nach vorne, die x-Achse nach rechts und die y-Achse nach oben weisen.)

c) Bestimmen Sie die zwei Ebenen F_1, F_2, in denen sich der Mittelpunkt einer Kugel bewegt, wenn die Kugel von oben auf der Ebene E_1 oder E_2 abrollt. Die Kugel soll dabei den Radius $r = \frac{1}{9}\sqrt{43}$ haben.

d) Wenn sich der Kugelmittelpunkt in der xy-Ebene bewegt: Wo kommt dieser Mittelpunkt dann zur Ruhe? In welchen Punkten berührt die Kugel dann die Tangentialebenen?

Aufgabenstellung: OStR Dr. M. L.
Quelle: Schularchiv Stift Keppel: Akte „Abitur 1993. Vorschläge“

Erklärung

Ich versichere dass ich die schriftliche Hausarbeit – einschließlich beigefügter Materialien – selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, habe ich in jedem Fall unter Angabe der Quelle deutlich als Entlehnung kenntlich gemacht.

Gabriel Isenberg

Siegen, den 15. Mai 2006